Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К МАТРИЧНЫМ ПРОБЛЕМАМ МОМЕНТОВ

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работы студентов четвертого курса механико-математического факультета

Харьков – 2014

УДК 517.948
ББК 22.161.5я73
З-14

Рецензенты:

Золотарев В. А. – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФТИНТ НАН Украины;

Янцевич А. А. – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математических методов в экономике Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Утверждено к печати решением Научно-методического совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 1 от 29.10.2014 г.)

Загороднюк С. М.

З-14 Операторный подход к матричным проблемам моментов : методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работы студентов четвертого курса механико-математического факультета / С. М. Загороднюк. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 56 с.

Методическое пособие содержит основные теоретические сведения, необходимые для овладения основами курса по операторному подходу к матричным проблемам моментов. Матричные проблемы моментов представлены двумя, пожалуй, наиболее известными задачами в этой области: матричной проблемой моментов Гамбургера и усеченной матричной тригонометрической проблемой моментов. Приведены упражнения для самостоятельной работы студентов.

УДК 517.948
ББК 22.161.5я73

Оглавление

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}$	множество всех вещественных чисел
$\mathbb{C}$	множество всех комплексных чисел
$\mathbb{N}$	множество всех натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество всех целых чисел
$\mathbb{Z}_+$	множество всех целых неотрицательных чисел
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Im} z > 0\}$
$\mathbb{C}_-$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Im} z < 0\}$
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \lvert z\rvert < 1\}$
$\mathbb{T}$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \lvert z\rvert = 1\}$
$\mathbb{D}_e$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \lvert z\rvert > 1\}$
$\mathbb{T}_e$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \lvert z\rvert \neq 1\}$
$\mathbb{R}_e$	$\{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Im} z \neq 0\}$
$\mathbb{R}^d$	вещественное d-мерное евклидово пространство, $d \in \mathbb{N}$
$k \in \overline{j, \rho}$	означает, что $k \in \mathbb{Z}_+$: $j \leq k \leq \rho$, если $\rho < \infty$; или $k \in \mathbb{Z}_+$: $k \geq j$, если $\rho = \infty$
$\mathbb{C}_{K\times N}$	множество всех комплексных матриц размера $(K \times N)$, $K, N \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$	множество всех неотрицательных матриц из $\mathbb{C}_{N\times N}$, $N \in \mathbb{N}$
I_N	единичная матрица размера $(N \times N)$, $N \in \mathbb{N}$
C^T	транспонированная матрица для матрицы $C \in (K \times N)$, $K, N \in \mathbb{N}$
C^*	сопряженная матрица для матрицы $C \in (K \times N)$, $K, N \in \mathbb{N}$
Π_λ	та из полуплоскостей $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$, которая содержит точку $\lambda \in \mathbb{R}_e$
Π^ε_λ	$\{z \in \Pi_\lambda: \ \varepsilon < \lvert\arg z\rvert < \pi - \varepsilon\}, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}_e$
$\mathfrak{B}(M)$	множество всех борелевских подмножеств множества M, принадлежащего $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$
$\mathbb{P}$	множество всех скалярных алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами
$\operatorname{card}(M)$	количество элементов некоторого множества M с конечным числом элементов
$\mathcal{S}(D; N, N')$	класс всех аналитических в области $D \subseteq \mathbb{C}$ операторнозначных функций $F(z)$, значения которых суть линейные нерастягивающие операторы, отображающие всё N в N', где N и N' – некоторые гильбертовы пространства.

Все гильбертовы пространства будут предполагаться сепарабельными, а операторы в них — линейными. Если H — гильбертово пространство, то

$(\cdot,\cdot)_H$	скалярное произведение в H
$\|\cdot\|_H$	норма в H
$\overline{M}$	замыкание множества $M \subseteq H$ по норме H
$\mathrm{Lin}\, M$	линейная оболочка множества $M \subseteq H$
$\mathrm{span}\, M$	замкнутая линейная оболочка множества $M \subseteq H$
E_H	единичный оператор в H, т. е. $E_H x = x$, $\forall x \in H$
O_H	нулевой оператор в H, т. е. $0_H x = 0$, $\forall x \in H$
o_H	оператор в H с $D(o_H) = \{0\}$, $o_H 0 = 0$
$P_{H_1} = P_{H_1}^H$	оператор ортогонального проектирования на подпространство H_1 в H

При этом индексы могут опускаться в очевидных случаях. Если A — линейный оператор в H, то

$D(A)$	область определения оператора A
$R(A)$	область значений оператора A
$\mathrm{Ker}\, A$	$\{x \in H :\ Ax = 0\}$ (ядро оператора A)
A^*	сопряженный оператор, если таковой существует
A^{-1}	обратный оператор, если оператор обратим
$\overline{A}$	замыкание оператора A, если A допускает замыкание
$A\|_M$	сужение оператора A на множество $M \subseteq H$
$\rho_r(A)$	множество точек регулярного типа оператора A
$\|A\|$	норма оператора A, если он ограничен
$w.-\lim$	предел в смысле слабой операторной топологии
$s.-\lim$	предел в смысле сильной операторной топологии
$u.-\lim$	предел в смысле равномерной операторной топологии

В случае, когда A является замкнутым изометрическим оператором:

$M_\zeta = M_\zeta(A)$	$(E_H - \zeta A)D(A)$, где $\zeta \in \mathbb{C}$
$N_\zeta = N_\zeta(A)$	$H \ominus M_\zeta$, где $\zeta \in \mathbb{C}$
$M_\infty = M_\infty(A)$	$R(A)$
$N_\infty = N_\infty(A)$	$H \ominus R(A)$
$\mathcal{R}_\zeta = \mathcal{R}_\zeta(V)$	$(E_H - \zeta V)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$

В случае, когда A является замкнутым симметрическим оператором (не обязательно плотно заданным):

$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z(A)$	$(A - zE_H)D(A)$, где $z \in \mathbb{C}$
$\mathcal{N}_z = \mathcal{N}_z(A)$	$H \ominus \mathcal{M}_z$, где $z \in \mathbb{C}$
$R_z = R_z(A)$	$(A - zE_H)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

Предисловие

Интерполяционным задачам анализа посвящено огромное количество работ, следует упомянуть книги [37], [47], [48], [58], [45], [59], [49], [50], и книги по проблемам моментов, которым уделяется отдельное внимание [1], [2], [3], [24], [60]. Нашей целью является краткое изложение операторного подхода к различным матричным проблемам моментов. По-видимому, впервые операторный подход к проблеме моментов Гамбургера появился в работах М. А. Наймарка. Пользуясь своими исследованиями по спектральным функциям симметрических операторов, М. А. Наймарк описал решения проблемы моментов Гамбургера (в невырожденном случае) в терминах спектральных функций оператора, задаваемого матрицей Якоби [27, с. 303–305]. Далее для операторов с индексом дефекта $(1,1)$ М. А. Наймарк предложил описание обобщенных резольвент (а значит, и соответствующих спектральных функций), удобное для практических применений. В качестве одного такого применения была получена формула Неванлинны для описания всех решений проблемы моментов [28, с. 292–294]. Операторный подход развивался М. Г. Крейном и М. А. Красносельским в [23] с использованием идей М. Г. Крейна 1946–1948 гг. [19], [22]. Позднее возникли различные видоизменения и модификации операторного подхода. Матричные и операторные проблемы моментов с помощью операторного подхода изучались В. М. Адамяном, Е. Л. Александровым, Т. Андо, Ю. М. Березанским, Н. Е. Дудкиным, В. Г. Ершовым, Г. М. Ильмушкиным, О. Т. Ининым, М. А. Красносельским, М. Г. Крейном, Л. Н. Лукс, К. К. Симоновым, И. М. Ткаченко, А. Б. Турицыным, А. Я. Хейфецом и другими математиками (см., например, [34], [35], [36], [11], [39], [6], [10], [13], [54], [23], [20], [21], [25], [61], [62], [12]). Операторный подход к операторной задаче Неванлинны-Пика был предложен Б. Сёкефальви-Надем и А. Кораньи в работах [66], [67]. Операторный подход к многомерной проблеме моментов и комплексной проблеме моментов можно найти в работах [52], [56].

Для скалярных интерполяционных задач вырождение информационного блока, как правило, ведет к определенности задачи (т. е. к единственности решения). Обычно в этом случае легко находится соответствующее решение. Детальное изучение матричных интерполяционных задач вначале проводилось для неопределенного (в случае бесконечного числа данных — вполне неопределенного) случая, который близок к невырожденному случаю скалярных интерполяционных задач. Первые идеи относительно описания всех решений для общего случая матричных и операторных интерполяционных задач появились в работах [10, с. 77–78], [46]. Детальное изучение вырожденного случая матричной интерполяционной задачи Шура было проведено В. К. Дубовым в работе [4]. Позднее другие методы изучения вырожденных случаев интерполяционных задач предлагались в работах [38], [42], [54], [34], [41], [43], [44], и в упоминавшихся выше книгах [48], [59].

Рассматриваемый нами операторный подход позволяет рассматривать одновременно вырожденный и невырожденный случаи заданной проблемы моментов. В случае вырождения информационного блока процедура решения задачи не включает дополнительных шагов и в сущности состоит в стандартном процессе ортогонализации Грама–Шмидта последовательности векторов гильбертова пространства. При этом коэффициенты соответствующего дробно-линейного преобразования, возникающего в формуле неванлинновского типа, явно выражаются через заданные интерполяционные данные.

В параграфе 1 основным инструментом при изучении проблем моментов являются обобщенные резольвенты изометрических и симметрических операторов в гильбертовом пространстве. Если в некотором гильбертовом пространстве H задан замкнутый изометрический (симметрический) оператор A, и $B \supseteq A$ является унитарным (соответственно, самосопряженным) расширением оператора A в некотором гильбертовом пространстве $G \supseteq H$, то операторнозначная функция

$$\mathbf{R}_z(A) = \mathbf{R}_{u;z}(A) = P^G_H(E_G - zB)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{T}_e$$

(соответственно,

$$\mathbf{R}_z(A) = \mathbf{R}_{s;z}(A) = P^G_H(B - zE_G)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{R}_e)$$

называется *обобщенной резольвентой изометрического (соответственно, симметрического) оператора* A. Пусть $\{E_t\}$ является ортогональным разложением единицы унитарного (соответственно, самосопряженного) оператора B. Функция

$$\mathbf{E}_t = P^G_H E_t,$$

где $t \in [0, 2\pi]$ (соответственно, $t \in \mathbb{R}$) называется *спектральной функцией изометрического (соответственно, симметрического) оператора* A. Пусть также $E(\delta)$ является спектральной мерой унитарного (соответственно, самосопряженного) оператора B. Тогда следующая функция:

$$\mathbf{E}(\delta) = P^G_H E(\delta),$$

где $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{T})$ (соответственно, $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$) называется *спектральной мерой изометрического (соответственно, симметрического) оператора* A. Из спектрального разложения оператора A следует, что обобщенные резольвенты и спектральные меры (либо непрерывные слева спектральные функции) находятся во взаимно-однозначном соответствии. Действительно, для случая изометрического оператора A выполнено:

$$(\mathbf{R}_z(A)f, g)_H = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - zu} d(\mathbf{E}(\cdot)f, g)_H = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ze^{it}} d(\mathbf{E}_t f, g)_H, \quad \forall f, g \in H. \tag{1}$$

Для случая симметрического оператора A справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{R}_z(A)f, g)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} d(\mathbf{E}(\cdot)f, g)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} d(\mathbf{E}_t f, g)_H, \quad \forall f, g \in H. \tag{2}$$

Решения интерполяционных задач тесно связаны со спектральными функциями некоторого изометрического либо симметрического оператора, который отвечает задаче. При этом оказывается удобным использование формул Штрауса и Чумакина, дающих аналитическое описание обобщенных резольвент, см. [33], [29], [32]. Для замкнутого изометрического оператора A формула

$$\mathbf{R}_z(A) = \left[E_H - z(A \oplus F_z)\right]^{-1}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми функциями F_z принадлежащими $\mathcal{S}(\mathbb{D}; N_0(A), N_\infty(A))$ и всеми обобщенными резольвентами оператора A.

Рассмотрим теперь случай замкнутого симметрического *плотно заданного* оператора A в гильбертовом пространстве H. Выберем произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}_e$. Пусть C — произвольный ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathcal{N}_\lambda(A)$ в $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}(A)$. Для

$$g = f + C\psi - \psi, \qquad f \in D(A),\ \psi \in \mathcal{N}_\lambda(A) \tag{4}$$

полагаем

$$A_C g = Af + \lambda C\psi - \overline{\lambda}\psi. \tag{5}$$

Оператор A_C называется *квазисамосопряженным расширением оператора A, определяемым оператором C.*

Зафиксируем произвольную точку $\lambda_0 \in \mathbb{R}_e$. Для симметрического оператора A формула

$$\mathbf{R}_{s;\lambda} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(A_{F(\lambda)} - \lambda E_H\right)^{-1}, & \lambda \in \Pi_{\lambda_0} \\ \left(A_{F^*(\overline{\lambda})} - \lambda E_H\right)^{-1}, & \overline{\lambda} \in \Pi_{\lambda_0} \end{array} \right. , \tag{6}$$

где $F(\lambda) \in \mathcal{S}(\Pi_{\lambda_0}; \mathcal{N}_{\lambda_0}, \mathcal{N}_{\overline{\lambda_0}})$ устанавливает взаимно–однозначное соответствие между классом $\mathcal{S}(\Pi_{\lambda_0}; \mathcal{N}_{\lambda_0}, \mathcal{N}_{\overline{\lambda_0}})$ и обобщенными резольвентами оператора A.

Формула (6) называется формулой Штрауса обобщенных резольвент, а формула (3) – формулой Чумакина обобщенных резольвент. Эти формулы будут использованы при исследовании различных интерполяционных задач.

Конечно, возможности операторного подхода не исчерпываются описанными в тексте интерполяционными задачами. Нашей главной целью было изложить идеи, которые лежат в основе решения задач. После этого перенесение этих идей на другие интерполяционные задачи во многих случаях не требует больших усилий.

С другой стороны, существуют разновидности задач, применение операторного подхода к которым еще требует изучения. Например, здесь можно привести пример L-проблем моментов [2], [24], которые в настоящее время изучаются В. И. Коробовым, Г. М. Скляром и их последователями, см., например, [15], [16], [17], [53], [18], [63].

В тексте мы стараемся использовать лишь известные из классических учебников и монографий результаты. Исторические примечания, а также перечень формальных ссылок на авторство приведенных результатов будут приведены в разделе «Библиографические примечания».

§1. Матричные проблемы моментов

1.1. Пространство $L^2(M)$

В этом параграфе при рассмотрении различных матричных проблем моментов будет часто использоваться пространство $L^2(M)$, где M — некоторая неубывающая матричнозначная функция. Мы напомним определение и некоторые свойства подобных пространств.

Рассмотрим произвольное множество Ω. Пусть $\mathcal{B}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества Ω такая, что $\Omega \in \mathcal{B}$. Зафиксируем произвольное натуральное число N. Функция $M(B)$, заданная на σ-алгебре $\mathcal{B}$ и принимающая значения в $\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$, называется (конечной) **$\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$-значной мерой (матричной мерой) на** $(\Omega, \mathcal{B})$, если $M(B)$ счетно-аддитивна. Под счетной аддитивностью матричнозначной функции $M(B) = (m_{k,l}(B))_{k,l=0}^{N-1}$ понимается счетная аддитивность каждой скалярной комплексной функции $m_{k,l}$:

$$m_{k,l}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{k,l}(B_j)$$

для произвольного набора непересекающихся множеств B_j из $\mathcal{B}$. В таком случае каждая функция $m_{k,l}$ является обычной комплексной мерой на σ-алгебре $\mathcal{B}$. При этом $m_{k,k}$ является неотрицательной мерой на $\mathcal{B}$, $0 \leq k \leq N-1$. Посредством $\tau = \tau_M$ обозначим следующую неотрицательную меру:

$$\tau_M(B) = \sum_{k=0}^{N-1} m_{k,k}(B), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

В силу неотрицательности матрицы $M(B)$ для произвольного $B \in \mathcal{B}$, рассматривая ее минор, стоящий в k-й строке и j-м столбце, мы получаем:

$$|m_{k,j}(B)| \leq m_{k,k}(B) m_{j,j}(B), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Следовательно, мера $m_{k,j}$ является абсолютно непрерывной относительно меры τ_M. В соответствии с теоремой Радона–Никодима мы можем записать:

$$m_{k,j}(B) = \int_B (m_{k,j})'_\tau(\omega) d\tau,$$

где $(m_{k,j})'_\tau$ — производная Радона–Никодима меры $m_{k,l}$ относительно меры τ. Обозначим

$$M'_\tau = M'_\tau(\omega) = \left((m_{k,j})'_\tau(\omega)\right)_{k,j=0}^{N-1}.$$

Матричнозначная функция M'_τ задана τ-п.в. (почти всюду) на множестве Ω, и называется **производной Радона–Никодима матричной меры** M. В тех точках из Ω, где M'_τ не задана, мы положим ее равной нулевой матрице.

Рассмотрим произвольную функцию $F(\omega) = (f_{k,l}(\omega))_{0\leq k\leq K-1;\ 0\leq l\leq N-1}$, заданную на множестве Ω и принимающую значения в $\mathbb{C}_{K\times N}$, $K \in \mathbb{N}$. Функция $F(\omega)$ называется **$\mathcal{B}$-измеримой**, если каждая скалярная функция $f_{k,l}(\omega)$ $\mathcal{B}$-измерима. Пусть задана некоторая скалярная (неотрицательная) σ-аддитивная мера μ на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Измеримая функция $F(\omega)$ называется **интегрируемой по мере** μ, если каждая скалярная функция $f_{k,l}(\omega)$ является интегрируемой по мере μ (в смысле Лебега). При этом под интегралом от функции $F(\omega)$ по мере μ понимается следующее выражение:

$$\int_\Omega F(\omega) d\mu = \left(\int_\Omega f_{k,l} d\mu\right)_{0\leq k\leq K-1,\ 0\leq l\leq N-1}.$$

Если $A \in \mathcal{B}$, то через $\chi_A(\omega)$ будем обозначать характеристическую функцию множества A:

$$\chi_A(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{array} \right. .$$

Ясно, что функция $\chi_A(\omega)F(\omega)$ является $\mathcal{B}$-измеримой. Под интегралом от функции $F(\omega)$ относительно меры μ по множеству A понимается следующее выражение:

$$\int_A F(\omega)d\mu = \int_\Omega \chi_A(\omega)F(\omega)d\mu.$$

Отметим, что в соответствии с данными выше определениями, производная Радона–Никодима M'_τ является $\mathcal{B}$-измеримой и интегрируемой по мере τ_M. При этом

$$\int_B M'_\tau(\omega)d\tau = M(B), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Проверим, что

$$0 \le M'_\tau(\omega) \le I_N \tag{7}$$

для τ-п.в. ω из Ω. Действительно, рассмотрим произвольный элемент (N-мерный комплексный вектор) $x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})^T \in \mathbb{C}_{N\times1}$. Если $y = (y_0, y_1, ..., y_{N-1})^T \in \mathbb{C}_{N\times1}$, то обозначаем $(x,y) = (x,y)_{\mathbb{C}_{N\times1}} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j\overline{y_j}$. Определим следующую неотрицательную меру:

$$m_x(A) := \int_A (M'_\tau x, x)d\tau_M = \int_A \sum_{k,j=0}^{N-1} (m_{k,j})'_\tau x_j\overline{x_k}d\tau$$

$$= \sum_{k,j=0}^{N-1} m_{k,j}(A)x_j\overline{x_k} = (M(A)x,x) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{C}_{N\times1},\ A \in \mathcal{B}.$$

Непосредственно из этого определения видно, что мера m_x абсолютно непрерывна относительно меры τ. При этом $(M'_\tau x, x)$ является соответствующей производной Радона–Никодима, и, значит, τ-п.в. неотрицательна. Заметим, что для любой неотрицательной эрмитовой матрицы $H \in \mathbb{C}^{\ge}_{N\times N}$ выполнено:

$$(Hx,x) \le \lambda_{\max}(x,x) \le \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k(x,x) = t(H)(x,x),$$

где λ_k — собственные значения H, $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение H, и $t(H)$ — след H. Значит,

$$0 \le H \le t(H)I_N, \qquad H \in \mathbb{C}^{\ge}_{N\times N}.$$

Учитывая последнее соотношение, определим следующую неотрицательную меру:

$$m^1_x(A) := \int_A ((I_N - M'_\tau)x, x)d\tau = \int_A (x,x)d\tau_M - \int_A (M'_\tau x, x)d\tau$$

$$= \tau(A)(x,x) - (M(A)x,x) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{C}_{N\times1},\ A \in \mathcal{B}.$$

Мера m^1_x абсолютно непрерывна относительно меры τ. Функция $((I_N - M'_\tau)x, x)$ является соответствующей производной Радона–Никодима и потому является τ-п.в. неотрицательной. Определим множество N_x следующим образом:

$$N_x = \{\omega \in \Omega : (M'_\tau(w)x,x) < 0\} \cup \{\omega \in \Omega : ((I_N - M'_\tau(w))x,x) < 0\},$$

где $x \in \mathbb{C}_{N\times 1}$. Заметим, что $\tau(N_x) = 0$. Пусть X – произвольное счетное всюду плотное множество в $\mathbb{C}_{N\times 1}$. Обозначим

$$N = \bigcup_{x\in X} N_x.$$

Тогда $\tau(N) = 0$. Для всех $\omega \in \Omega\backslash N$, и для всех x из X выполнено соотношение:

$$0 \le (M'_\tau(\omega)x, x) \le (x, x).$$

Пользуясь предельным переходом получим, что последнее соотношение выполнено для всех $x \in \mathbb{C}_{N\times 1}$ и всех $\omega \in \Omega\backslash N$. Следовательно, имеет место соотношение (7).

В дальнейшем *полагаем* $M'_\tau = 0$ *на множестве* N. Обозначим

$$\vec{e}_j := (\delta_{0,j}, \delta_{1,j}, ..., \delta_{N-1,j})^T \in \mathbb{C}_{N\times 1}, \qquad 0 \le j \le N-1.$$

Вектора $\{e_j\}_{j=0}^{N-1}$ образуют стандартный базис в $\mathbb{C}_{N\times 1}$. Матрицу из $\mathbb{C}_{N\times N}$ мы будем ассоциировать с оператором в $\mathbb{C}_{N\times 1}$, имеющим эту матрицу в стандартном базисе. При этом матрица и соответствующий оператор часто будут обозначаться одной и той же буквой, и различить их можно будет из контекста.

Предложение 1. *Пусть* G *— произвольная матрица из* $\mathbb{C}^{\ge}_{N\times N}$, $N \in \mathbb{N}$, *и* J *— матрица оператора* $P^{\mathbb{C}_{N\times 1}}_{R(G)}$ *в стандартном базисе* $\mathbb{C}_{N\times 1}$. *Тогда*

$$J\sqrt{G} = \sqrt{G} = \sqrt{G}J, \tag{8}$$

и существует обратимая эрмитова матрица H *такая, что*

$$H\sqrt{G} = J = \sqrt{G}H. \tag{9}$$

При этом

$$J = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G}.$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ker} G = \operatorname{Ker}\sqrt{G}$, то $R(G) = R(\sqrt{G})$. Поэтому $P^{\mathbb{C}_{N\times 1}}_{R(G)} = P^{\mathbb{C}_{N\times 1}}_{R(\sqrt{G})}$. Отсюда легко получаем соотношение (8). Оператор $\sqrt{G}$, суженный на $R(\sqrt{G})$, является обратимым и отображает $R(\sqrt{G})$ на $R(\sqrt{G})$. Соответствующий обратный оператор обозначим H_1. Полагаем $H = H_1 \oplus E_{\operatorname{Ker}\sqrt{G}}$. Оператор H обратим и для него легко проверяется соотношение (9). Остается заметить, что

$$\sqrt[n]{G} = \sum_{k:\ \lambda_k \ne 0} \sqrt[n]{\lambda_k} P_{M_k} \to \sum_{k:\ 0\le k\le N-1,\ \lambda_k\ne 0} P_{M_k} = J, \qquad \text{при } n\to\infty,$$

где λ_k – собственное число G, а M_k – соответствующее собственное подпространство, $0 \le k \le N-1$. $\square$

Проверим, что матричнозначная функция $\sqrt[n]{M'_\tau(\omega)}$, $\omega \in \Omega$, является $\mathcal{B}$-измеримой, для любого натурального n. Рассмотрим последовательность многочленов $\{q_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,1]$ к непрерывной функции $\sqrt[n]{\lambda}$. Для оператора $M'_\tau(\omega)$ в силу (7) и нашего соглашения $M'_\tau(\omega)|_N = 0$ выполнено: $M'_\tau(\omega) = \int_0^1 \lambda dE_\lambda$, где E_λ – ортогональное разложение единицы $M'_\tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Отсюда легко следует, что $q_n(M'_\tau(\omega)) \to \sqrt[n]{M'_\tau(\omega)}$ при $n\to\infty$. В силу измеримости $q_n(M'_\tau(\omega))$ отсюда следует измеримость функции $\sqrt[n]{M'_\tau(\omega)}$.

Обозначим посредством $J(\omega) = J_M(\omega)$ матрицу оператора $P^{\mathbb{C}_{N\times 1}}_{R(M'_\tau(\omega))}$ в стандартном базисе, $\omega \in \Omega$. Применяя предложение 1 для $G = M'_\tau(\omega)$ записываем:

$$J_M(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M'_\tau(\omega)}.$$

Поскольку допредельные функции $\mathcal{B}$-измеримы, то и функция $J_M(\omega)$ является $\mathcal{B}$-измеримой.

Посредством $S^2(M)$ обозначим множество всех $\mathcal{B}$-измеримых $\mathbb{C}_{1\times N}$-значных функций $F(\omega) = (f_0(\omega), f_1(\omega), ..., f_{N-1}(\omega))$ таких, что скалярная функция $F(\omega)M'_\tau(\omega)F^*(\omega)$ является интегрируемой относительно меры τ_M. Для $F \in S^2(M)$ полагаем

$$\|F\|_2 := \left(\int_\Omega F(\omega)M'_\tau(\omega)F^*(\omega)d\tau_M\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Проверим, что для произвольных $F, G \in S^2(M)$ скалярная функция $FM'_\tau G^*$ интегрируема относительно меры τ_M. Для этого заметим, что

$$\|F\|_2^2 = \int_\Omega F(\omega)\sqrt{M'_\tau(\omega)}\left(F(\omega)\sqrt{M'_\tau(\omega)}\right)^* d\tau_M, \tag{10}$$

и, значит, τ-измеримая функция $F(\omega)\sqrt{M'_\tau(\omega)}$ принадлежит обычному пространству $L^2_v(\tau)$ (классов эквивалентности) $\mathbb{C}_{1\times N}$-значных τ-измеримых функций $\Psi(\omega)$ таких, что

$$\|\Psi\|_{L^2_v(\tau)} := \left(\int_\Omega \Psi(\omega)\Psi^*(\omega)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Тогда

$$(F\sqrt{M'_\tau}, G\sqrt{M'_\tau})_{L^2_v(\tau)} = \int_\Omega F(\omega)\sqrt{M'_\tau(\omega)}\left(G(\omega)\sqrt{M'_\tau(\omega)}\right)^* d\tau_M =$$

$$= \int_\Omega F(\omega)M'_\tau(\omega)G^*(\omega)d\tau_M < \infty.$$

Поскольку для произвольных комплексных чисел α и β выполнено:

$$(\alpha F + \beta G)(\alpha F + \beta G)^* = |\alpha|^2 FF^* + \alpha\overline{\beta}FG^* + \beta\overline{\alpha}GF^* + |\beta|^2 GG^*,$$

то множество $S^2(M)$ является линейным пространством. Определим в $S^2(M)$ скалярное произведение следующим образом:

$$(F, G)_2 := \int_\Omega F(\omega)M'_\tau(\omega)G(\omega)d\tau = (F\sqrt{M'_\tau}, G\sqrt{M'_\tau})_{L^2_v(\tau)}, \quad F, G \in S^2(M).$$

Из последнего соотношения непосредственно видно, что $(\cdot,\cdot)_2$ обладает всеми свойствами скалярного произведения за исключением, быть может, свойства $(F, F)_2 = 0 \Leftrightarrow F = 0$. Другими словами, множество $S^2(M)$ является предгильбертовым пространством. Следуя стандартной процедуре, будем относить два элемента F и G из $S^2(M)$ к одному классу эквивалентности, если $\|F - G\|_2 = 0$. Множество полученных классов эквивалентности образует гильбертово пространство, которое мы обозначим $L^2(M)$.

Теорема 1. *Пусть M — $\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$-значная мера на $(\Omega, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй на некотором множестве Ω, и $\Omega \subseteq \mathcal{B}$. Тогда множество $L^2(M)$ является полным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_2$.*

Доказательство. Проверим полноту пространства $L^2(M)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, $F_n \in L^2(M)$, такую, что $\|F_n - F_m\|_2 \to 0$, при $n, m \to 0$. Согласно (10) мы можем записать:

$$\|F_n\sqrt{M'_\tau} - F_m\sqrt{M'_\tau}\|_{L^2_v(\tau)} \to 0, \qquad \text{при } n, m \to \infty.$$

В силу полноты пространства $L^2_v(\tau)$ найдется элемент $\Psi \in L^2_v(\tau)$ такой, что

$$\|F_n\sqrt{M'_\tau} - \Psi\|_{L^2_v(\tau)} \to 0, \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Из последовательности $\{F_n\sqrt{M'_\tau}\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{F_{n_k}\sqrt{M'_\tau}\}_{k=1}^\infty$, сходящуюся к элементу Ψ τ-п.в. Рассмотрим τ-измеримую функцию $J(\omega) = J_M(\omega)$, $\omega \in \Omega$, определенную выше. Применяя предложение 1 для $G = M'_\tau(\omega)$, получаем:

$$J(\omega) = \sqrt{M'_\tau(\omega)}H(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

где $H(\omega)$ — обратимая матрица для всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$F_{n_k}(\omega)J(\omega) = F_{n_k}(\omega)\sqrt{M'_\tau}(\omega)H(\omega) \to \Psi(\omega)H(\omega), \qquad \tau\text{-п.в.}$$

Поскольку допредельная функция $\mathcal{B}$-измерима, то функция ΨH также является $\mathcal{B}$-измеримой. Пользуясь вновь предложением 1 для $G = M'_\tau(\omega)$, мы можем записать:

$$F_{n_k}(\omega)\sqrt{M'_\tau}(\omega) = F_{n_k}(\omega)J(\omega)\sqrt{M'_\tau}(\omega) \to \Psi(\omega)H(\omega)\sqrt{M'_\tau}(\omega), \qquad \tau\text{-п.в.}$$

Значит, $\Psi(\omega) = \Psi(\omega)H(\omega)\sqrt{M'_\tau}(\omega)$, для τ-п.в. $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\|F_{n_k} - \Psi(\omega)H(\omega)\|_2 = \|F_{n_k}\sqrt{M'_\tau} - \Psi(\omega)H(\omega)\sqrt{M'_\tau}\|_{L^2_v(\tau)} =$$

$$= \|F_{n_k}\sqrt{M'_\tau} - \Psi(\omega)\|_{L^2_v(\tau)} \to 0, \qquad \text{при } k \to \infty.$$

Следовательно, элемент ΨH принадлежит $L^2(M)$ и последовательность $\{F_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится к ΨH по норме $L^2(M)$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $\|F_n - F_r\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n, r > N(\varepsilon)$. Среди натуральных чисел r, больших $N(\varepsilon)$, существует число n_k такое, что $\|F_{n_k} - \Psi H\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\|F_n - \Psi H\|_2 \leq \|F_n - F_{n_k}\|_2 + \|F_{n_k} - \Psi H\|_2 < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Значит, вся последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к ΨH по норме $L^2(M)$. $\square$

Пусть $M = (m_{k,l}(B))_{k,l=0}^{N-1}$ — произвольная $\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$-значная мера на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Определим следующую неубывающую матричнозначную функцию:

$$M(t) := M((-\infty, t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Функция $M(t)$ называется **функцией распределения меры** M. Скалярные неубывающие функции $(M(t)\vec{e}_k, \vec{e}_k)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$, согласно процедуре лебегова продолжения, однозначно задают меры $m_{k,k}(B)$. Аналогичным образом, неубывающие функции $(M(t)u, u)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$, согласно процедуре лебегова продолжения, однозначно задают меры $(M(B)u, u)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$ для произвольного вектора $u \in \mathbb{C}_{1\times N}$. Поскольку квадратичный функционал $(M(B)u, u)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$ однозначно задает билинейный функционал $(M(B)u, v)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$, то мы заключаем, что $\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$-значная мера M однозначно определяется по своей функции распределения.

Предположим теперь, что задана некоторая неубывающая непрерывная слева $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $\widetilde{M}$ на $\mathbb{R}$, и $\widetilde{M}(-\infty) := \lim_{t\to-\infty}\widetilde{M}(t) = 0$. Покажем, что она является функцией распределения некоторой $\mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$-значной меры на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Для произвольного вектора $u \in \mathbb{C}_{1\times N}$ определим скалярную меру σ_u согласно процедуре лебегова продолжения, используя неубывающую функцию $(M(t)u, u)_{\mathbb{C}_{1\times N}}$. Полагаем

$$\sigma_{u,v}(\delta) := \frac{1}{4}\left(\sigma_{u+v}(\delta) - \sigma_{u-v}(\delta) + i\sigma_{u+iv}(\delta) - i\sigma_{u-iv}(\delta)\right),$$

где $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ u, v \in \mathbb{C}_{1\times N}$. Тогда для произвольного интервала $[a, b)$ выполнено $\sigma_{u,v}([a, b)) = ((M(b) - M(a))u, v)_{\mathbb{C}_{1\times N}},\ u, v \in \mathbb{C}_{1\times N}$. В частности, это означает, что функционал $\sigma_{u,v}([a, b))$

при фиксированном интервале $[a,b)$ билинеен. Обозначим через $\mathcal{R}$ алгебру множеств, порожденную конечными вещественными интервалами. Тогда функционал $\sigma_{u,v}(\delta)$ будет билинейным при фиксированном $\delta \in \mathcal{R}$. Произвольное множество $\widetilde{\delta}$ из $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ можно приблизить относительно меры $\tau := \sum_{k=1}^{N} \sigma_{\vec{e}_k,\vec{e}_k}$ множествами δ_j из $\mathcal{R}$:

$$\tau(\widetilde{\delta} \triangle \delta_j) < \frac{1}{j}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\sigma_{\alpha u + \beta w, v}(\delta_j) = \alpha \sigma_{u,v}(\delta_j) + \beta \sigma_{w,v}(\delta_j), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

то, переходя к пределу при $j \to \infty$, получаем, что функционал $\sigma_{u,v}(\delta)$ будет линейным по первому аргументу при фиксированном $\delta \in \mathfrak{B}(R)$. Аналогично проверяется антилинейность по второму аргументу. Тогда имеет место представление:

$$\sigma_{u,v}(\delta) = (\widehat{M}(\delta)u, v)_{\mathbb{C}_{1\times N}}, \qquad \delta \in \mathfrak{B}(R),$$

где $\widehat{M}(\delta)$ – некоторая матрица из $\mathbb{C}_{N\times N}$. Заметим, что элементы этой матрицы являются σ-аддитивными комплексными мерами на $\mathfrak{B}(R)$. Поскольку $(\widehat{M}(\delta)u, u)_{\mathbb{C}_{1\times N}} = \sigma_u(\delta) \geq 0$ при всех $u \in \mathbb{C}_{1\times N}$, то $\widehat{M}(\delta)$ принадлежит $\mathbb{C}_{N\times N}^{\geq}$ для всех $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Итак, функция $\widehat{M}(\delta)$ является $\mathbb{C}_{N\times N}^{\geq}$-значной мерой на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Поскольку

$$(\widehat{M}(-\infty,t)u,v)_{\mathbb{C}_{1\times N}} = \sigma_{u,v}((-\infty,t)) = \lim_{n\to-\infty} \sigma_{u,v}([-n,t)) =$$

$$= \lim_{n\to-\infty} ((\widetilde{M}(t) - \widetilde{M}(-n))u, v)_{\mathbb{C}_{1\times N}} = ((\widetilde{M}(t)u, v)_{\mathbb{C}_{1\times N}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

то функция распределения меры $\widehat{M}(\delta)$ совпадает с функцией $\widetilde{M}(t)$.

1.2. Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов

1.2.1. Разрешимость

Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов состоит в нахождении неубывающей $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $M(t) = (m_{k,l}(t))_{k,l=0}^{N-1}$, заданной на отрезке $[0, 2\pi]$, непрерывной слева на $(0, 2\pi]$ и удовлетворяющей условию $M(0) = 0$, и такой, что выполнены следующие условия:

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dM(t) = S_n, \qquad n = 0, 1, ..., d, \tag{11}$$

где $\{S_n\}_{n=0}^{d}$ является заданной последовательностью комплексных матриц размера $(N \times N)$. Матрицы S_n называются **(матричными) моментами**. Здесь размерность матриц $N \in \mathbb{N}$ и число моментов $d \in \mathbb{Z}_+$ являются фиксированными числами. В дальнейшем усеченную матричную тригонометрическую проблему моментов будем сокращенно обозначать УМТПМ.

Рассмотрим следующую блочную матрицу:

$$T_d = (S_{i-j})_{i,j=0}^{d} = \begin{pmatrix} S_0 & S_{-1} & S_{-2} & \dots & S_{-d} \\ S_1 & S_0 & S_{-1} & \dots & S_{-d+1} \\ S_2 & S_1 & S_0 & \dots & S_{-d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_d & S_{d-1} & S_{d-2} & \dots & S_0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где
$$S_n := S_{-n}^*, \qquad n = -d, -d+1, ..., -1. \tag{13}$$
Блочные матрицы, имеющие такую структуру, называют **блочными тёплицевыми матрицами**. Матрицу T_d часто называют **информационным блоком** задачи. Проверим, что условие
$$T_d \geq 0 \tag{14}$$
является необходимым и достаточным для разрешимости проблемы моментов (11).

Итак, пусть задана проблема моментов (11). Предположим, что проблема моментов имеет решение $M(t)$. Определим S_n, $n = -d, -d+1, ..., -1$, формулой (13). Заметим, что
$$S_{-n} = S_n^* = \left(\int_0^{2\pi} e^{int} dM(t) \right)^* = \int_0^{2\pi} e^{-int} dM(t), \qquad n = 0, 1, ..., d.$$
Значит,
$$\int_0^{2\pi} e^{int} dM(t) = S_n, \qquad -d \leq n \leq d.$$
Рассмотрим произвольный векторнозначный многочлен $P(t)$ следующего вида:
$$P(t) = \sum_{k=0}^{d} (\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}, ..., \alpha_{k,N-1}) e^{ikt} = \sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} e^{ikt} \vec{e}_s, \ \ \alpha_{k,s} \in \mathbb{C}, \tag{15}$$
где
$$\vec{e}_s = (\delta_{0,s}, \delta_{1,s}, ..., \delta_{N-1,s}).$$
Тогда
$$0 \leq \int_0^{2\pi} P(t) dM(t) P^*(t) = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\alpha_{r,l}} \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} \vec{e}_s dM(t) \vec{e}_l^* =$$
$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\alpha_{r,l}} \vec{e}_s S_{k-r} \vec{e}_l^*.$$
Таким образом, для произвольных комплексных чисел $\alpha_{k,s}$, $0 \leq k \leq d$, $0 \leq s \leq N-1$, выполнено
$$\sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\alpha_{r,l}} \vec{e}_s S_{k-r} \vec{e}_l^* \geq 0. \tag{16}$$
Определим матрицу T_d посредством (12) и положим
$$\vec{\alpha} = (\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1}, ..., \alpha_{0,N-1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, ..., \alpha_{1,N-1}, ..., \alpha_{d,0}, \alpha_{d,1}, ..., \alpha_{d,N-1}).$$
Согласно правил умножения блочных матриц, соотношение (16) означает, что
$$\vec{\alpha} T_d \vec{\alpha}^* \geq 0,$$
и значит, $T_d \geq 0$.

Наоборот, пусть задана проблема моментов (11) с некоторым $d \in \mathbb{N}$ и выполнено соотношение (14). Информационный блок T_d и матричные моменты S_k можно рассматривать как обычные (не блочные) комплексные матрицы:
$$T_d = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^{(d+1)N-1}, \ \ S_k = (S_{k;s,l})_{s,l=0}^{N-1}, \quad -d \leq k \leq d,$$

где $\gamma_{n,m}, S_{k;s,l} \in \mathbb{C}$. При этом будут выполняться следующие равенства:

$$\gamma_{kN+s,rN+l} = S_{k-r;s,l}, \qquad 0 \le k, r \le d, \quad 0 \le s, l \le N-1. \tag{17}$$

Согласно хорошо известной конструкции гильбертова пространства, следует, что существуют гильбертово пространство H и набор элементов $\{x_n\}_{n=0}^{(d+1)N-1}$ в H такие, что

$$(x_n, x_m) = \gamma_{n,m}, \qquad 0 \le n, m \le (d+1)N-1, \tag{18}$$

и $\mathrm{span}\{x_n\}_{n=0}^{(d+1)N-1} = H$. Конкретная реализация пространства H **не имеет значения для дальнейших построений**. Например, можно построить пространство H следующим образом.
Рассмотрим комплексное линейное векторное пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются вектор-строки $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_{(d+1)N-1})$ с $u_n \in \mathbb{C}$, $0 \le n \le (d+1)N-1$. Сложение и умножение на скаляр определим для векторов обычным образом. Положим

$$\vec{\varepsilon}_n = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \delta_{n,2}, ..., \delta_{n,(d+1)N-1}), \qquad 0 \le n \le (d+1)N-1,$$

где $\delta_{n,r}$ – символ Кронекера. В $\mathfrak{H}$ определим линейный функционал B следующим образом:

$$B(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{n,r=0}^{(d+1)N-1} a_n \overline{b_r} \gamma_{n,r},$$

где

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{(d+1)N-1} a_n \vec{\varepsilon}_n, \quad \vec{w} = \sum_{r=0}^{(d+1)N-1} b_r \vec{\varepsilon}_r, \quad a_n, b_r \in \mathbb{C}.$$

Пространство $\mathfrak{H}$ с B является квазигильбертовым пространством. Стандартным образом мы относим два элемента $\vec{u}$, $\vec{w}$ из $\mathfrak{H}$ к одному классу эквивалентности, который обозначается $[\vec{u}]$ или $[\vec{w}]$, если $B(\vec{u}-\vec{w}, \vec{u}-\vec{w}) = 0$. Пространство классов эквивалентности является конечномерным гильбертовым пространством. Остается положить

$$x_n := [\vec{\varepsilon}_n], \qquad 0 \le n \le (d+1)N-1.$$

Вышеописанный факт можно вкратце выразить следующим образом: *всякая неотрицательная матрица является матрицей Грама.*

Зафиксируем построенное выше пространство или любое другое пространство с нужными нам свойствами и в дальнейшем при рассмотрении УМТПМ будем обозначать его H.

Вторым важным шагом при решении интерполяционной задачи является задание оператора (или операторов в случае многомерной задачи), который должен использовать данные задачи и по возможности принадлежать к известному классу операторов (симметрический, изометрический и т. п.). В случае различных проблем моментов таким оператором часто выступает оператор сдвига: $x_n \mapsto x_{n+N}$, где N — размерность матриц-моментов, а x_n — вектора гильбертова пространства, матрица Грама которых совпадает с информационным блоком задачи. Подобная ситуация имеет место и для УМТПМ.

Обозначим $H_0 := \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}$. Рассмотрим следующий оператор:

$$Ax = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_{k+N}, \quad x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k \in H_0, \; \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Нужно проверить, что такое задание оператора является корректным. Действительно, поскольку элементы x_n не обязательно являются линейно независимыми, то элемент $x \in H_0$ может допускать два представления:

$$x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k, \quad x = \sum_{k=0}^{dN-1} \beta_k x_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}.$$

Используя соотношения (17),(18), записываем:

$$\left\| \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_{k+N} - \sum_{k=0}^{dN-1} \beta_k x_{k+N} \right\|^2 = \left(\sum_{k=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) x_{k+N}, \sum_{r=0}^{dN-1} (\alpha_r - \beta_r) x_{r+N} \right) =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) \overline{(\alpha_r - \beta_r)} \gamma_{k+N,r+N} = \sum_{k,r=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) \overline{(\alpha_r - \beta_r)} \gamma_{k,r} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) x_k, \sum_{r=0}^{dN-1} (\alpha_r - \beta_r) x_r \right) = (x - x, x - x) = 0.$$

Значит определение A корректно. Для произвольных двух векторов $x, y \in H_0$, $x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k$, $y = \sum_{k=0}^{dN-1} \gamma_k x_k$, $\alpha_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$, мы можем записать:

$$(Ax, Ay) = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\gamma_r} (x_{k+N}, x_{r+N}) = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\gamma_r} \gamma_{k+N,r+N} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\gamma_r} \gamma_{k,r} = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\gamma_r} (x_k, x_r) = (x, y).$$

Значит, A является изометрическим оператором. Как известно, каждый изометрический оператор допускает унитарное расширение в некотором, возможно, более широком, гильбертовом пространстве. Пусть $U \supseteq A$ является *произвольным* унитарным расширением A в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Для произвольного целое неотрицательного числа n ($n = rN + l$, $0 \leq r \leq d$, $0 \leq l \leq N-1$) по индукции легко получается следующее соотношение:

$$x_{rN+l} = A^r x_l.$$

Выберем также произвольное число m: $m = kN + s$, $0 \leq k \leq d$, $0 \leq s \leq N-1$, и, используя (17), запишем:

$$S_{k-r;s,l} = \gamma_{kN+s,rN+l} = (x_m, x_n)_H = (A^k x_s, A^r x_l)_H = (U^k x_s, U^r x_l)_{\widetilde{H}} =$$

$$= (U^{k-r} x_s, x_l)_{\widetilde{H}} = \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} d(E_t x_s, x_l)_{\widetilde{H}},$$

где $\{E_t\}_{t \in [0,2\pi]}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора U. Отсюда следует, что

$$S_{j;s,l} = \int_0^{2\pi} e^{ijt} d(P_H^{\widetilde{H}} E_t x_s, x_l)_H, \quad -d \leq j \leq d, \ 0 \leq s, l \leq N-1.$$

Полагаем

$$M_U(t) = \left((P_H^{\widetilde{H}} E_t x_s, x_l)_H \right)_{s,l=0}^{N-1}, \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{20}$$

Матричнозначная функция $M_U(t)$ является решением проблемы моментов (11). Действительно, данная функция является неубывающей, что следует из свойств ортогонального разложения единицы, а также удовлетворяет моментным равенствам (11). Мы приходим к следующему выводу: **всякое унитарное расширение оператора A порождает решение УМТПМ по формуле (20)**. Вспоминая определение спектральной функции изометрического оператора (см. введение), мы можем утверждать также, что **всякая непрерывная слева спектральная функция оператора A порождает решение УМТПМ**. Как мы увидим в следующем пункте, последние два утверждения допускают обращение, т. е. произвольное решение УМТПМ может быть получено таким образом.

Теорема 2. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (11). Проблема моментов имеет решение в том и только том случае, когда $T_d \geq 0$, где T_d из (12).*

Доказательство. Для случая $d \in \mathbb{N}$ требуемый результат установлен выше. В случае $d = 0$ решением будет следующая функция:

$$M(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ S_0, & t \in (0, 2\pi] \end{cases}.$$

□

В случае $d = 0$ произвольная непрерывная слева неубывающая $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция M, $M(0) = 0$, $M(2\pi) = S_0$, является решением проблемы моментов (11). Поэтому представляет интерес лишь случай $d \in \mathbb{N}$, который и будет рассматриваться в дальнейшем.

1.2.2. Описание решений в терминах спектральных функций

Рассмотрим некоторую проблему моментов (11) с числом моментов $d \in \mathbb{N}$. Будем предполагать в дальнейшем, что задача разрешима, т. е. выполнено условие (14). После получения условий разрешимости УМТПМ мы рассмотрим другой важный вопрос, который возникает при исследовании любой интерполяционной задачи — описание всех решений задачи. Мы выберем и зафиксируем некоторое гильбертово пространство H и последовательность элементов $\{x_n\}_{n=0}^{(d+1)N-1}$ в H, удовлетворяющих соотношению (18). Определим, как и ранее, изометрический оператор A посредством соотношения (19). Как мы видели в предыдущем пункте, произвольная непрерывная слева спектральная функция изометрического оператора A порождает решение проблемы моментов (11) посредством соотношения (20).

С другой стороны, пусть $\widehat{M}$ — произвольное решение проблемы моментов (11). Обозначим через $L^2_{0,d}(\widehat{M})$ множество всех классов эквивалентности, которые содержат многочлены вида (15) (или проще – множество всех многочленов вида (15)) в $L^2(\widehat{M})$. Рассмотрим произвольный многочлен $P(t)$ вида (15) и произвольный многочлен

$$Q(t) = \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{r,l} e^{irt} \vec{e}_l, \ \ \beta_{r,l} \in \mathbb{C}. \tag{21}$$

Вычислим скалярное произведение этих многочленов:

$$(P(t), Q(t))_{L^2(\widehat{M})} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} \vec{e}_s S_{k-r} \vec{e}_l^{\,*} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} S_{k-r;s,l} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} \gamma_{kN+s,rN+l} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} (x_{kN+s}, x_{rN+l})_H =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} x_{kN+s}, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{r,l} x_{rN+l} \right)_H . \tag{22}$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$WP(t) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} x_{kN+s}.$$

Проверим, что этот оператор корректно задан как оператор, отображающий множество $L^2_{0,d}(\widehat{M})$ в H. Предположим, что два многочлена $P(t)$ и $Q(t)$ вида (15) и (21) соответственно принадлежат одному и тому же классу эквивалентности: $(P(t) - Q(t), P(t) - Q(t))_{L^2(\widehat{M})} = 0$. Тогда

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) e^{ikt} \vec{e}_s, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} (\alpha_{r,l} - \beta_{r,l}) e^{irt} \vec{e}_l \right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) \overline{(\alpha_{r,l} - \beta_{r,l})} \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) x_{kN+s}, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} (\alpha_{r,l} - \beta_{r,l}) x_{rN+l} \right)_H = \|WP - WQ\|_H.$$

Значит, оператор W определен корректно. Соотношение (22) показывает, что W является изометрическим оператором и отображает $L^2_{0,d}(\widehat{M})$ на H. Обозначим $L^2_1(\widehat{M}) := L^2(\widehat{M}) \ominus L^2_{0,d}(\widehat{M})$. Оператор

$$U := W \oplus E_{L^2_1(\widehat{M})}$$

является унитарным оператором, который отображает $L^2(\widehat{M}) = L^2_{0,d}(\widehat{M}) \oplus L^2_1(\widehat{M})$ на $H_1 := H \oplus L^2_1(\widehat{M})$.

Рассмотрим следующий унитарный оператор:

$$U_0 f(t) = e^{it} f(t), \qquad f(t) \in L^2(\widehat{M}).$$

Тогда

$$\widetilde{U}_0 := U U_0 U^{-1}$$

является унитарным оператором в H_1. Заметим, что

$$\widetilde{U}_0 x_{kN+s} = U U_0 e^{ikt} \vec{e}_s = U e^{i(k+1)t} \vec{e}_s = x_{(k+1)N+s} = A x_{kN+s},$$

где $0 \le k \le d-1$, $0 \le s \le N-1$. Значит, оператор $\widetilde{U}_0$ является унитарным расширением оператора A в пространстве $H_1 \supseteq H$. Как мы уже знаем, такому расширению (и соответствующей спектральной функции) отвечает согласно (20) некоторое решение УМТПМ. Мы теперь покажем, что этим решением есть в точности функция $\widehat{M}$.

Пусть $\{\widetilde{E}_t\}_{t \in [0,2\pi]}$ — непрерывное слева ортогональное разложение единицы $\widetilde{U}_0$, а $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{R}_\zeta$ являются спектральной функцией и обобщенной резольвентой оператора A, отвечающими унитарному расширению $\widetilde{U}_0$ соответственно. Проверим, что

$$\widehat{M}(t) = ((\mathbf{E}_t x_s, x_l)_H)_{s,l=0}^{N-1}. \tag{23}$$

Действительно, мы можем записать

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} d(\mathbf{E}_t x_s, x_l)_H = (\mathbf{R}_\zeta x_s, x_l)_H = \left((E_{H_1} - \zeta \widetilde{U}_0)^{-1} x_s, x_l \right)_{H_1} =$$

$$= \left(U(E_{L^2(\widehat{M})} - \zeta U_0)^{-1} U^{-1} x_s, x_l \right)_{H_1} = \left((E_{L^2(\widehat{M})} - \zeta U_0)^{-1} \vec{e}_s, \vec{e}_l \right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*}.$$

Согласно формуле обращения, мы заключаем, что соотношение (23) выполнено.

Теорема 3. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (11) с $d \in \mathbb{N}$ и выполнено условие (14). Пусть оператор A построен для проблемы моментов так, как в (19). Все решения проблемы моментов имеют следующий вид:*

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \quad m_{k,j}(t) = (\mathbf{E}_t x_k, x_j)_H, \tag{24}$$

где $\mathbf{E}_t$ является непрерывной слева спектральной функцией изометрического оператора A. Наоборот, произвольная непрерывная слева спектральная функция A порождает по формуле (24) решение проблемы моментов (11).

Кроме того, соответствие между всеми непрерывными слева спектральными функциями A и всеми решениями проблемы моментов является взаимно однозначным.

Доказательство. Остается показать, что различные непрерывные слева спектральные функции A порождают различные решения проблемы моментов (11). Обозначим

$$H_\zeta := (E_H - \zeta A) D(A) = (E_H - \zeta A) H_0, \quad \zeta \in \mathbb{T}_e;$$

и $L_N := \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$. Выберем произвольный элемент $x \in H$, $x = \sum_{k=0}^{dN+N-1} \alpha_k x_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Проверим, что для произвольного $\zeta \in \mathbb{T}_e \backslash \{0\}$ существует представление

$$x = v + y, \qquad v \in H_\zeta,\ y \in L_N, \tag{25}$$

где элементы v, y могут зависеть от выбора ζ. Выберем произвольное число $\zeta \in \mathbb{T}_e \backslash \{0\}$. Полагаем

$$c_r := -\frac{1}{\zeta} \alpha_{r+N}, \qquad r = dN - N, dN - N + 1, ..., dN - 1,$$

и

$$c_r := \frac{1}{\zeta} (c_{r+N} - \alpha_{r+N}), \qquad r = dN - N - 1, dN - N - 2, ..., 0.$$

Пусть

$$u := \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k \in D(A); \quad v := (E_H - \zeta A) u \in H_\zeta.$$

Тогда

$$v = \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k - \zeta \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_{k+N} = \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k - \zeta \sum_{k=N}^{dN+N-1} c_{k-N} x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \sum_{k=N}^{dN-1} (c_k - \zeta c_{k-N}) x_k - \zeta \sum_{k=dN}^{dN+N-1} c_{k-N} x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \sum_{k=N}^{dN+N-1} \alpha_k x_k = \sum_{k=0}^{N-1} (c_k - \alpha_k) x_k + x.$$

Остается обозначить $y := -\sum_{k=0}^{N-1}(c_k - \alpha_k)x_k \in L_N$, и мы получаем требуемое представление $x = v + y$.

Предположим теперь от противного, что две различные непрерывные слева спектральные функции A порождают одно и то же решение проблемы моментов (11). Согласно определению спектральной функции, найдутся два унитарных расширения $U_j \supseteq A$, в гильбертовых пространствах $\widetilde{H}_j \supseteq H$, такие, что

$$\mathbf{E}_{1,t} = P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t} \neq P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t} = \mathbf{E}_{2,t};$$

и

$$(P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t} x_k, x_j)_H = (P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t} x_k, x_j)_H, \qquad 0 \leq k, j \leq N-1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $\{E_{j,t}\}_{t\in[0,2\pi]}$ являются ортогональными разложениями единицы операторов U_j, $j = 1, 2$. По линейности мы получаем

$$(P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t} x, y)_H = (P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{26}$$

Обозначим

$$R_{j,\zeta} := (E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)^{-1}, \ \mathbf{R}_{j,\zeta} := P_H^{\widetilde{H}_j} R_{j,\zeta}, \qquad j = 1, 2, \ \zeta \in \mathbb{T}_e.$$

Из (26) и (1) следует, что

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta} x, y)_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad \zeta \in \mathbb{T}_e. \tag{27}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{T}_e$. Поскольку для $j = 1, 2$ выполнено соотношение:

$$R_{j,\zeta}(E_H - \zeta A)x = (E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)^{-1}(E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)x = x, \qquad x \in H_0 = D(A),$$

то

$$R_{1,\zeta} u = R_{2,\zeta} u \in H, \qquad u \in H_\zeta, \ \zeta \in \mathbb{T}_e;$$
$$\mathbf{R}_{1,\zeta} u = \mathbf{R}_{2,\zeta} u, \qquad u \in H_\zeta, \ \zeta \in \mathbb{T}_e. \tag{28}$$

Предположим теперь дополнительно, что $\zeta \neq 0$. В этом случае мы можем записать:

$$(\mathbf{R}_{j,\zeta} x, u)_H = (R_{j,\zeta} x, u)_{\widetilde{H}_j} = (x, R_{j,\zeta}^* u)_{\widetilde{H}_j} =$$

$$= (x, (E_{\widetilde{H}_j} - R_{j,\frac{1}{\overline{\zeta}}})u)_{\widetilde{H}_j} = (x, u)_H - (x, \mathbf{R}_{j,\frac{1}{\overline{\zeta}}} u)_H, \quad x \in L_N, \ u \in H_{\frac{1}{\overline{\zeta}}}, \ j = 1, 2.$$

Таким образом, мы получаем

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta} x, u)_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta} x, u)_H, \qquad x \in L_N, \ u \in H_{\frac{1}{\overline{\zeta}}}, \ \zeta \in \mathbb{T}_e \backslash \{0\}. \tag{29}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}: \ 0 < |\zeta| < 1$. Согласно (25) произвольный элемент $y \in H$ может быть представлен в следующем виде: $y = y_{\frac{1}{\overline{\zeta}}} + y'$, где $y_{\frac{1}{\overline{\zeta}}} \in H_{\frac{1}{\overline{\zeta}}}$, $y' \in L_N$. Пользуясь (27) и (29) мы получаем, что

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta} x, y)_H = (\mathbf{R}_{1,\zeta} x, y_{\frac{1}{\overline{\zeta}}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta} x, y_{\frac{1}{\overline{\zeta}}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z} x, y)_H,$$

где $x \in L_N, \ y \in H$. Таким образом, мы получаем

$$\mathbf{R}_{1,\zeta} x = \mathbf{R}_{2,\zeta} x, \qquad x \in L_N, \ \zeta \in \mathbb{C}: \ 0 < |\zeta| < 1. \tag{30}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}:\ 0 < |\zeta| < 1$. Для произвольного $h \in H$, используя (25), мы можем записать

$$h = a + b, \qquad a \in L_N, \quad b \in H_\zeta.$$

Используя соотношения (30),(28), мы получаем

$$\mathbf{R}_{1,\zeta} h = \mathbf{R}_{1,\zeta} a + \mathbf{R}_{1,\zeta} b = \mathbf{R}_{2,\zeta} a + \mathbf{R}_{2,\zeta} b = \mathbf{R}_{2,\zeta} h.$$

Значит,

$$\mathbf{R}_{1,\zeta} = \mathbf{R}_{2,\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}:\ 0 < |\zeta| < 1.$$

Заметим, что $\mathbf{R}_{1,0} = E_H = \mathbf{R}_{2,0}$, и выполнена следующая формула:

$$\mathbf{R}_{j,\zeta}^* = \mathbf{R}_{j,\frac{1}{\overline{\zeta}}}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}_e \backslash \{0\}, \quad j = 1, 2.$$

Значит,

$$\mathbf{R}_{1,\zeta} = \mathbf{R}_{2,\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}_e.$$

По формуле обращения мы получаем, что $\mathbf{E}_{1,t} \equiv \mathbf{E}_{2,t}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

1.2.3. Аналитическое описание решений

Мы воспользуемся теперь формулой Чумакина обобщенных резольвент замкнутого изометрического оператора.

Теорема 4. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (11) и условие (14) выполнено. Пусть оператор A построен для проблемы моментов как в (19). Все решения проблемы моментов имеют следующий вид:*

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \qquad t \in [0, 2\pi], \tag{31}$$

где $m_{k,j}$ получаются из следующего соотношения:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dm_{k,j}(t) = \left([E - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1} x_k, x_j \right)_H, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{32}$$

Здесь Φ_ζ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus D(A), H \ominus R(A))$.

Наоборот, произвольная операторнозначная функция из $\mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus D(A), H \ominus R(A))$ порождает посредством соотношений (31)–(32) решение проблемы моментов (11).

Более того, соответствие между всеми операторнозначными функциями из $\mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus D(A), H \ominus R(A))$ и всеми решениями проблемы моментов (11) является биективным.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из сравнения теоремы 3 с формулой Чумакина. □

1.2.4. Условия определенности

Проблему моментов (11) называют **определенной**, если она имеет единственное решение и **неопределенной** в противном случае. Результаты предыдущего пункта позволяют получить простые условия определенности УМТПМ, в том числе в терминах заданных матричных моментов.

Теорема 5. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (11) с $d \geq 1$ и условие (14) с T_d из (12) выполнено. Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H задан соотношением (19). Следующие условия эквивалентны:*

(A) *проблема моментов (11) определенная;*

(B) *индексы дефекта A равны нулю;*

(C) *для каждого фиксированного r, $dN \le r \le dN+N-1$, следующая система линейных уравнений:*

$$\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{r,n}\gamma_{n,j} = \gamma_{r,j}, \qquad 0 \le j \le dN+N-1,$$

относительно неизвестных $\alpha_{r,0}, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,dN-1}$ имеет решение. Здесь числа $\gamma_{\cdot,\cdot}$ определены в (17).

Если указанные условия выполнены, то единственное решение проблемы моментов (11) дается следующей формулой:

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \quad m_{k,j}(t) = (E_t x_k, x_j)_H,$$

где E_t является непрерывным слева ортогональным разложением единицы унитарного оператора A. Это решение является кусочно-постоянной функцией.

Доказательство. (A)$\Rightarrow$(B). Заметим, что дефектные числа оператора A всегда равны, поскольку этот оператор является изометрическим и действует в конечномерном пространстве. Если дефектные числа больше нуля, тогда мы можем выбрать единичные вектора $u_1 \in H \ominus D(A)$ и $u_2 \in H \ominus R(A)$. Положим

$$\Phi_\zeta(cu_1 + u) = cu_2, \qquad c \in \mathbb{C},\ u \in (H \ominus D(A)) \ominus \mathrm{Lin}\{u_1\},\ \zeta \in \mathbb{D}.$$

С другой стороны, полагаем $\widetilde{\Phi}_\zeta \equiv 0$. Функции Φ_ζ и $\widetilde{\Phi}_\zeta$ порождают различные решения УМТПМ посредством соотношения (32) и потому УМТПМ является неопределенной.
(B)$\Rightarrow$(A). Если дефектные числа A равны нулю, тогда единственной допустимой функцией Φ_ζ в соотношении (32) является $\Phi_\zeta \equiv 0$.

Справедлива следующая цепочка: (B) $\Leftrightarrow$ $(D(A) = H)$ $\Leftrightarrow$

$$\left(x_{dN}, x_{dN+1}, \dots, x_{dN+N-1} \in \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\left\{ \begin{array}{rl} x_{dN} &= \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN,n} x_n \\ x_{dN+1} &= \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+1,n} x_n \\ & \dots \\ x_{dN+N-1} &= \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+N-1,n} x_n \end{array} \right. , \ \alpha_{dN,n}, \alpha_{dN+1,n}, \cdots, \alpha_{dN+N-1,n} \in \mathbb{C} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\left\{ \begin{array}{rl} (x_{dN}, x_j)_H &= (\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN,n} x_n, x_j)_H \\ (x_{dN+1}, x_j)_H &= (\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+1,n} x_n, x_j)_H \\ & \dots \\ (x_{dN+N-1}, x_j)_H &= (\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+N-1,n} x_n, x_j)_H \end{array} \right. ,\right.$$

где $\alpha_{dN,n}, \alpha_{dN+1,n}, \cdots, \alpha_{dN+N-1,n} \in \mathbb{C}$, $0 \le j \le dN+N-1$) $\Leftrightarrow$ (C). $\square$

1.2.5. Формула неванлинновского типа

Пусть задана проблема моментов (11) с $d \ge 1$ и выполнено условие (14), где T_d определены в (12). Полученное нами выше соотношение (32) имеет простой вид. Тем не менее, для многократного построения решений удобнее иметь формулу, в которой присутствовала бы некоторая аналитическая матричнозначная функция-параметр, а остальные функции-коэффициенты явно вычислялись бы по заданным моментам. Иными словами, хотелось бы, чтобы формула была подобной формуле Неванлинны, известной из теории скалярной проблемы моментов Гамбургера (впрочем, нам не понадобятся результаты этой теории, более того, ниже мы получим матричные аналоги некоторых результатов этой теории).

Будем вначале предполагать, что УМТПМ является неопределенной и оба дефектных числа A равны $\delta = \delta(A)$, $\delta \geq 1$ (как отмечалось выше, дефектные числа A всегда равны). Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам

$$x_0, x_1, \dots, x_{dN+N-1}.$$

Во время этого процесса мы будем использовать числа $\gamma_{\cdot,\cdot}$, определенные в (17), а также свойство (18).

Шаг j; $0 \leq j \leq dN + N - 1$. Вычисляем

$$n_j := \left\| x_j - \sum_{k:\ 0\leq k\leq j-1,\ n_k\neq 0} (x_j, y_k)_H y_k \right\|_H, \tag{33}$$

где сумма в правой части может быть пустой (т. е. не содержать слагаемых и равняться нулю). Если $n_j \neq 0$, то мы полагаем

$$y_j := \frac{1}{n_j}\left(x_j - \sum_{k:\ 0\leq k\leq j-1,\ n_k\neq 0} (x_j, y_k)_H y_k \right). \tag{34}$$

Если $n_j = 0$, мы переходим к следующему шагу.

Отметим, что всегда найдется ненулевое n_j с $0 \leq j \leq N - 1$. Действительно, в противном случае мы бы получили $\|x_j\|_H^2 = \gamma_{j,j} = 0$, $0 \leq j \leq N - 1$. В таком случае мы получаем $S_0 = 0$ и $M(t) \equiv 0$, что противоречит неопределенности УМТПМ.

Пользуясь индукцией, легко заключить, что каждый элемент y_j может быть представлен как линейная комбинация векторов $x_0, x_1, \dots, x_j$. Следовательно, числа n_j вычисляются с использованием заданных моментов посредством соотношений (18) и (17).

Обозначим $\Omega_1 = \{j :\ 0 \leq j \leq dN + N - 1,\ n_j \neq 0\}$. Тогда $\mathfrak{A} := \{y_j\}_{j\in\Omega_1}$ является ортонормированным базисом в H. Кроме того, $\mathfrak{A}_1 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1:\ j\leq N-1}$ является ортонормированным базисом в L_N, и $\mathfrak{A}_2 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1:\ j\leq dN-1}$ является ортонормированным базисом в $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1} = D(A)$. Следовательно, $\mathfrak{A}_3 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1:\ dN\leq j\leq dN+N-1}$ является ортонормированным базисом в $H \ominus D(A)$. Отсюда, в частности, следует, что $\delta \leq N$. При этом $\mathrm{card}(\mathfrak{A}_3) = \delta \geq 1$. Пусть $\rho := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_1)$, $\tau := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_2)$. Отметим, что $1 \leq \rho \leq N$, $\tau \geq \rho \geq 1$.

k-й элемент, начиная считать от нуля, в множестве $\mathfrak{A}$, упорядоченном в порядке построения его элементов, мы обозначим u_k, $k = 0, 1, ..., \tau + \delta - 1$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_k\}_{k=0}^{\tau+\delta-1}$, $\mathfrak{A}_1 = \{u_k\}_{k=0}^{\rho-1}$, $\mathfrak{A}_2 = \{u_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, $\mathfrak{A}_3 = \{u_k\}_{k=\tau}^{\tau+\delta-1}$.

В дальнейшем нам потребуется еще один ортонормированный базис в H. В силу изометричности оператора A множество $\mathfrak{A}_2' := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, где $v_k := Au_k$, является ортонормированным базисом в $R(A)$. Кроме того, $R(A) = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=dN}^{dN+N-1}$. Значит, линейная оболочка векторов $\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$ и $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ равна H. Тогда и линейная оболочка векторов $\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, $\{u_k\}_{k=0}^{\rho-1}$, также равна H. Применим теперь процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам

$$v_0, v_1, \dots, v_{\tau-1}, u_0, u_1, \dots, u_{\rho-1}.$$

Как и в предыдущей процедуре ортогонализации, мы будем использовать числа $\gamma_{\cdot,\cdot}$, определенные в (17), и свойство (18). Первые τ элементов уже ортонормированы.

Шаг j; $0 \le j \le \rho - 1$. Вычисляем

$$m_j := \left\| u_j - \sum_{l=0}^{\tau-1} (u_j, v_l)_H v_l - \sum_{k:\ 0\le k\le j-1,\ m_k\ne 0} (u_j, f_k)_H f_k \right\|_H , \tag{35}$$

где последняя сумма в правой части может быть пустой. Если $m_j \ne 0$, то мы полагаем

$$f_j := \frac{1}{m_j} \left(u_j - \sum_{l=0}^{\tau-1} (u_j, v_j)_H v_j - \sum_{k:\ 0\le k\le j-1,\ m_k\ne 0} (u_j, f_k)_H f_k \right). \tag{36}$$

Если $m_j = 0$, мы переходим к следующему шагу.

Обозначим $\Omega_2 = \{j :\ 0 \le j \le \rho - 1,\ m_j \ne 0\}$. Тогда $\mathfrak{A}' := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1} \cup \{f_j\}_{j\in\Omega_2}$ является ортонормированным базисом в H. Полагаем $\mathfrak{A}_3' := \{f_j\}_{j\in\Omega_2}$. Заметим, что $\mathrm{card}(\mathfrak{A}_3') = \delta$. Обозначим k-й элемент, считая от нуля, в множестве $\mathfrak{A}_3'$, упорядоченном в порядке построения его элементов, посредством $v_{\tau+k}$, $k = 0,1,...,\delta-1$. Тогда $\mathfrak{A}' = \{v_k\}_{k=0}^{\tau+\delta-1}$, $\mathfrak{A}_3' = \{v_k\}_{k=\tau}^{\tau+\delta-1}$.

Теперь нашей целью будет преобразование правой части формулы (32) с использованием записи операторов в подходящих ортонормированных базисах. Обозначим $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$ матрицу оператора $E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Здесь Φ_ζ является аналитической в $\mathbb{D}$ операторнозначной функцией, чьи значения являются линейными сжатиями из $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$. Тогда

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A\oplus\Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau+\delta-1} = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & B_{0,\zeta}(\Phi) \\ C_{0,\zeta} & D_{0,\zeta}(\Phi) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(A\oplus\Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} = \left((u_k - \zeta A u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} =$$
$$= I_\tau - \zeta \left((v_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1}, \tag{37}$$

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A\oplus\Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{0\le j\le\tau-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1} =$$
$$= \left((u_k - \zeta\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{0\le j\le\tau-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1} =$$
$$= -\zeta \left((\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{0\le j\le\tau-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1},$$
$$C_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(A\oplus\Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ 0\le k\le\tau-1} =$$
$$= \left((u_k - \zeta A u_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ 0\le k\le\tau-1} =$$
$$= -\zeta \left((v_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ 0\le k\le\tau-1}, \tag{38}$$
$$D_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A\oplus\Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1} =$$
$$= \left((u_k - \zeta\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1} =$$
$$= I_\delta - \zeta \left((\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le\tau+\delta-1,\ \tau\le k\le\tau+\delta-1},\ \zeta\in\mathbb{D}.$$

Заметим, что матрица $A_{0,\zeta}$ является обратимой, поскольку она является матрицей оператора $P_{D(A)}(E_H - \zeta A)P_{D(A)} = E_{D(A)} - \zeta P_{D(A)} A P_{D(A)}$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $D(A)$, в базисе $\mathfrak{A}_2$, при $\zeta \in \mathbb{D}$. Отметим, что матрицы $A_{0,\zeta}, C_{0,\zeta}$, где $\zeta \in \mathbb{D}$, явно вычисляются с помощью соотношений (18) и (17).

Обозначим F_ζ, $\zeta \in \mathbb{D}$, матрицу оператора Φ_ζ, действующего из $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$, относительно базисов $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{A}_3'$:

$$F_\zeta = (f_\zeta(j,k))_{j,k=\tau}^{\tau+\delta-1}, \qquad f_\zeta(j,k) := (\Phi_\zeta u_k, v_j)_H.$$

Тогда

$$\Phi_\zeta u_k = \sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, \quad \tau \le k \le \tau+\delta-1,$$

и

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta \left(\left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, u_j \right)_H \right)_{0\le j\le \tau-1,\ \tau\le k\le \tau+\delta-1} =$$

$$= -\zeta \left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} (v_l, u_j)_H\, f_\zeta(l,k) \right)_{0\le j\le \tau-1,\ \tau\le k\le \tau+\delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Обозначим

$$W := \left((v_l, u_j)_H \right)_{0\le j\le \tau-1,\ \tau\le l\le \tau+\delta-1}. \tag{39}$$

Тогда

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta W F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Мы можем записать

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta \left(\left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, u_j \right)_H \right)_{\tau\le j\le \tau+\delta-1,\ \tau\le k\le \tau+\delta-1} =$$

$$= I_\delta - \zeta \left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} (v_l, u_j)_H\, f_\zeta(l,k) \right)_{\tau\le j\le \tau+\delta-1,\ \tau\le k\le \tau+\delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Полагаем

$$T := \left((v_l, u_j)_H \right)_{\tau\le j\le \tau+\delta-1,\ \tau\le l\le \tau+\delta-1}. \tag{40}$$

Тогда

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta T F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Мы получаем такое представление для матрицы $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$:

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & -\zeta W F_\zeta \\ C_{0,\zeta} & I_\delta - \zeta T F_\zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $A_{0,\zeta}$, $C_{0,\zeta}$ задаются соотношениями (37), (38), а W, T заданы в (39), (40).

Вычислим теперь матрицу оператора $[E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1}$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Для этого мы применим формулу Фробениуса обращения блочной матрицы:

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}^{-1}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta}^{-1} - \zeta A_{0,\zeta}^{-1} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_\zeta} A_{0,\zeta}^{+} - \frac{\zeta}{h_\zeta^2} A_{0,\zeta}^{+} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где звездочками $(*)$ обозначаются блоки матрицы, которые не представляют для нас интереса, и

$$H_\zeta(\Phi) = I_\delta - \zeta T F_\zeta + \zeta C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{-1} W F_\zeta = I_\delta - \zeta T F_\zeta + \frac{\zeta}{h_\zeta} C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W F_\zeta =$$

$$= I_\delta + \left(\frac{\zeta}{h_\zeta} C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W - \zeta T \right) F_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{41}$$

Здесь $A_{0,\zeta}^{+}$ обозначает матрицу, транспонированную к матрице, составленной из алгебраических дополнений к элементам $A_{0,\zeta}$, т. е. на месте (i,j) матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$ стоит алгебраическое дополнение к элементу на месте (j,i) матрицы $A_{0,\zeta}$, и

$$h_\zeta = \det A_{0,\zeta}. \tag{42}$$

Рассмотрим произвольное число $\zeta \in \mathbb{D}$. Часть матрицы $\mathcal{M}_{1,\zeta}^{-1}(\Phi)$, стоящую на пересечении первых ρ строк и первых ρ столбцов, мы будем обозначать $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$. Часть матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$, стоящую на пересечении первых ρ строк и первых ρ столбцов, обозначим $A_{1,\zeta}$. Первые ρ строк матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$ мы обозначим $A_{2,\zeta}$. Наконец, первые ρ столбцов $A_{0,\zeta}^{+}$ обозначим через $A_{3,\zeta}$. Матрица $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ допускает следующее представление:

$$\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) = \frac{1}{h_\zeta} A_{1,\zeta} - \frac{\zeta}{h_\zeta^2} A_{2,\zeta} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{3,\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{43}$$

Матрица $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ является матрицей оператора

$$P_{L_N} \left[E_H - \zeta (A \oplus \Phi_\zeta) \right]^{-1} P_{L_N},$$

рассматриваемого как оператор в L_N, в базисе $\mathfrak{A}_1$.

Рассмотрим следующий оператор из $\mathbb{C}_{N\times 1}$ в L_N:

$$K \sum_{n=0}^{N-1} c_n \vec{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} c_n x_n, \qquad c_n \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — матрица оператора K по отношению к базисам $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{N-1}$ и $\mathfrak{A}_1$:

$$\mathcal{K} = \left((K\vec{e}_k, u_j)_H \right)_{0\le j\le \rho-1,\ 0\le k\le N-1} = \left((x_k, u_j)_H \right)_{0\le j\le \rho-1,\ 0\le k\le N-1}. \tag{44}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\left(\left[E_H - \zeta (A \oplus \Phi_\zeta) \right]^{-1} x_k, x_j \right)_H = \\ &= \left(P_{L_N} \left[E_H - \zeta (A \oplus \Phi_\zeta) \right]^{-1} P_{L_N} K\vec{e}_k, K\vec{e}_j \right)_H = \\ &= \left(K^* P_{L_N} \left[E_H - \zeta (A \oplus \Phi_\zeta) \right]^{-1} P_{L_N} K\vec{e}_k, \vec{e}_j \right)_{\mathbb{C}_{N\times 1}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего выражения равна элементу матрицы $\mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) \mathcal{K}$, стоящему в j-й строке, k-м столбце. Используя (32), записываем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) = \mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) \mathcal{K}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{45}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_\zeta = \zeta C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W - \zeta h_\zeta T, \quad \mathbf{A}_\zeta = \mathcal{K}^* A_{1,\zeta} \mathcal{K}, \\ &\mathbf{B}_\zeta = \mathcal{K}^* A_{2,\zeta} W, \quad \mathbf{D}_\zeta = C_{0,\zeta} A_{3,\zeta} \mathcal{K}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{46}$$

Используя (41), (43), (45), мы приходим к следующему соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) = \frac{1}{h_\zeta} \mathbf{A}_\zeta - \frac{\zeta}{h_\zeta^2} \mathbf{B}_\zeta F_\zeta \left(I_\delta + \frac{1}{h_\zeta} \mathbf{C}_\zeta F_\zeta \right)^{-1} \mathbf{D}_\zeta,$$

где $\zeta \in \mathbb{D}$.

Теорема 6. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (11) с $d \geq 1$ и условие (14), где T_d из (12), выполнено. Предположим, что проблема моментов является неопределенной. Все решения проблемы моментов (11) получаются из следующего соотношения:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) =$$

$$= \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{A}_\zeta - \frac{\zeta}{h_\zeta^2}\mathbf{B}_\zeta F_\zeta \left(I_\delta + \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{C}_\zeta F_\zeta \right)^{-1} \mathbf{D}_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{47}$$

где $\mathbf{A}_\zeta$, $\mathbf{B}_\zeta$, $\mathbf{C}_\zeta$, $\mathbf{D}_\zeta$, являются матричными многочленами, определенными соотношением (46), со значениями в $\mathbb{C}_{N\times N}$, $\mathbb{C}_{N\times\delta}$, $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$, $\mathbb{C}_{\delta\times N}$ соответственно. Скалярный многочлен h_ζ, $\deg h_\zeta \leq \tau$, определяется в (42). Здесь F_ζ является аналитической в $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$-значной функцией, такой, что $F_\zeta^* F_\zeta \leq I_\delta$, $\forall\zeta \in \mathbb{D}$. Наоборот, произвольная аналитическая в $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$-значная функция, такая, что $F_\zeta^* F_\zeta \leq I_\delta$, $\forall\zeta \in \mathbb{D}$, порождает согласно соотношению (47) некоторое решение проблемы моментов (11). Соответствие между всеми аналитическими в $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$-значными функциями, такими, что $F_\zeta^* F_\zeta \leq I_\delta$, $\forall\zeta \in \mathbb{D}$, и всеми решениями проблемы моментов (11) взаимно однозначно.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из вышеприведенных рассуждений. □

Пример 1. Рассмотрим УМТПМ с $N = 3$, $d = 1$, и матричными моментами $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что условие (14) выполнено, а условие (С) теоремы 5 не выполняется. Таким образом, УМТПМ разрешима и является неопределенной. Матрица T_1 из (12) имеет следующий вид:

$$T_1 = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть H является гильбертовым пространством, построенным так, как это было описано выше после формулы (17), и $\{x_n\}_{n=0}^5$ являются элементами этого пространства со свойством (18). Применим процесс ортогонализации (33), (34) к элементам $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.
Шаг 0. Вычисляем $n_0 = \|x_0\|_H = \sqrt{(x_0, x_0)_H} = \sqrt{\gamma_{0,0}} = 1 \neq 0$. Полагаем $y_0 = x_0$.
Шаг 1. Вычисляем

$$n_1^2 = \|x_1 - (x_1, y_0)_H y_0\|_H^2 = \|x_1 - (x_1, x_0)_H x_0\|_H^2 = (x_1 - \gamma_{1,0}x_0, x_1 - \gamma_{1,0}x_0)_H =$$

$$= (x_1 - x_0, x_1 - x_0)_H = (x_1, x_1)_H - (x_1, x_0)_H - (x_0, x_1)_H + (x_0, x_0)_H =$$

$$= \gamma_{1,1} - \gamma_{1,0} - \gamma_{0,1} + \gamma_{0,0} = 0.$$

Следовательно, мы переходим к следующему шагу.
Шаг 2. Мы вычисляем

$$n_2^2 = \|x_2 - (x_2, y_0)_H y_0\|_H^2 = \|x_2 - \gamma_{2,0}x_0\|_H^2 = (x_2, x_2)_H = \gamma_{2,2} = 1.$$

Полагаем
$$y_2 = x_2 - (x_2, y_0)_H y_0 = x_2 - \gamma_{2,0} y_0 = x_2.$$
На шаге 3 мы получим $n_3 = 0$, на шаге 4 мы получим $n_4 = 0$. Наконец, на шаге 5 мы вычислим $n_5 = 1$ и $y_5 = x_5$.
Полагаем $\mathfrak{A} = \{y_0, y_2, y_5\}$. Пусть $u_0 := y_0 = x_0$, $u_1 := y_2 = x_2$, $u_2 := y_5 = x_5$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_k\}_{k=0}^2$.
Заметим, что в нашем случае $\rho = \tau = 2$, $\delta = 1$.
Полагаем $v_0 := Au_0 = Ax_0 = x_3$, $v_1 := Au_1 = Ax_2 = x_5$. Применим теперь процесс ортогонализации (35), (36) к элементам v_0, v_1, u_0, u_1.
Шаг 0. Вычисляем
$$m_0^2 = \|u_0 - (u_0, v_0)_H v_0 - (u_0, v_1)_H v_1\|_H^2 = \|x_0 - (x_0, x_3)_H x_3 - (x_0, x_5)_H x_5\|_H^2 =$$
$$= \|x_0 - \gamma_{0,3} x_3 - \gamma_{0,5} x_5\|_H^2 = \|x_0 - x_3\|_H^2 = (x_0 - x_3, x_0 - x_3)_H =$$
$$= \gamma_{0,0} - \gamma_{0,3} - \gamma_{3,0} + \gamma_{3,3} = 0.$$
Переходим к следующему шагу.
Шаг 1. Вычисляем
$$m_1^2 = \|u_1 - (u_1, v_0)_H v_0 - (u_1, v_1)_H v_1\|_H^2 =$$
$$= \|x_2 - (x_2, x_3)_H x_3 - (x_2, x_5)_H x_5\|_H^2 = \|x_2 - \gamma_{2,3} x_3 - \gamma_{2,5} x_5\|_H^2 =$$
$$= \|x_2\|_H^2 = (x_2, x_2)_H = \gamma_{2,2} = 1.$$
Полагаем
$$f_1 = u_1 - (u_1, v_0)_H v_0 - (u_1, v_1)_H v_1 =$$
$$= x_2 - (x_2, x_3)_H x_3 - (x_2, x_5)_H x_5 = x_2 - \gamma_{2,3} x_3 - \gamma_{2,5} x_5 = x_2.$$
Положим $\mathfrak{A}' = \{v_0, v_1, f_1\}$. Пусть $v_2 = f_1 = x_2$. Тогда $\mathfrak{A}' = \{v_k\}_{k=0}^2$.
Используя (39), (40), записываем
$$W = \left((v_l, u_j)_H\right)_{0 \le j \le 1,\ 2 \le l \le 2} = \begin{pmatrix} (x_2, x_0)_H \\ (x_2, x_2)_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{2,0} \\ \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$T = \left((v_l, u_j)_H\right)_{2 \le j \le 2,\ 2 \le l \le 2} = (v_2, u_2)_H = (x_2, x_5)_H = \gamma_{2,5} = 0.$$
Согласно (37), (38), мы вычисляем:
$$A_{0,\zeta} = I_2 - \zeta\left((v_k, u_j)_H\right)_{j,k=0}^1 = I_2 - \zeta \begin{pmatrix} (x_3, x_0)_H & (x_5, x_0)_H \\ (x_3, x_2)_H & (x_5, x_2)_H \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$C_{0,\zeta} = -\zeta\left((v_k, u_j)_H\right)_{2 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 1} = -\zeta(\gamma_{3,5}, \gamma_{5,5}) = -\zeta(0, 1).$$
Тогда $h_\zeta = \det A_{0,\zeta} = 1 - \zeta$,
$$A_{0,\zeta}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\zeta \end{pmatrix} = A_{1,\zeta} = A_{2,\zeta} = A_{3,\zeta}.$$
Используя (44), мы можем записать
$$\mathcal{K} = \left((x_k, u_j)_H\right)_{0 \le j \le 1,\ 0 \le k \le 2} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{1,0} & \gamma_{2,0} \\ \gamma_{0,2} & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя (46), мы вычисляем

$$\mathbf{C}_\zeta = -\zeta^2(1-\zeta), \quad \mathbf{A}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\zeta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_\zeta = -\zeta(0,0,1-\zeta).$$

Наконец, с помощью (47) мы получаем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\zeta} & \frac{1}{1-\zeta} & 0 \\ \frac{1}{1-\zeta} & \frac{1}{1-\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\zeta^2\frac{F_\zeta}{1-\zeta^2 F_\zeta} \end{pmatrix}, \ \zeta \in \mathbb{D}. \tag{48}$$

Любая аналитическая в $\mathbb{D}$, комплексная функция F_ζ, такая, что $|F_\zeta| \leq 1$, $\zeta \in \mathbb{D}$, порождает согласно соотношению (48) некоторое решение проблемы моментов (11). При этом получаются все решения проблемы моментов, а соответствие между функциями F_ζ и решениями взаимно однозначно. В частности, если положить $F_\zeta \equiv 1$, то

$$M(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{m}(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi],$$

где

$$\widetilde{m}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0 \\ 1, & \text{если } t \in (0, 2\pi] \end{cases}, \quad \widehat{m}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{если } t \in (0, \pi] \\ 1, & \text{если } t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

является решением УМТПМ.

Если же положить $F_\zeta = \zeta^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$, то мы получим другое решение $M_1(t)$ проблемы моментов:

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ 0 & 0 & m_1(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi],$$

где функция $\widetilde{m}(t)$ — такая же, как раньше, а

$$m_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{если } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{1}{2}, & \text{если } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \frac{3}{4}, & \text{если } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ 1, & \text{если } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}.$$

В процессе ортогонализации (33), (34), если $n_j = 0$ для некоторого j, то $n_k = 0$ для всех $j+1 \leq k \leq dN+N-1$, имеющих вид $k = j + Nr$, $r \in \mathbb{N}$. Это следует из того, что оператор A изометрический. Действительно, если x_j лежит в линейной оболочке предыдущих элементов ортогонализуемой последовательности, то и вышеуказанные элементы тоже, что получается применением оператора A к разложению x_j по элементам линейной оболочки. В частности, в примере 1 мы видели, что $n_1 = 0$, а потому и $n_4 = 0$. Это наблюдение позволяет упростить процесс (33), (34).

Рассмотрим теперь случай определенной УМТПМ (11). Как пользоваться формулой (47) в этом случае? Согласно теореме 5, в этом случае индексы дефекта соответствующего оператора A в гильбертовом пространстве H равны нулю. Следовательно, $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN+N-1} =$

$\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}$. Проведя процесс ортогонализации (33), (34), мы получим ортонормированный базис $\mathfrak{A}$ в H. В нашем случае базис $\mathfrak{A}_1$ задается так же, как и раньше, базис $\mathfrak{A}_2$ совпадает с $\mathfrak{A}$, а базис $\mathfrak{A}_3$ не понадобится. Как и ранее, полагаем $\rho := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_1)$, $\tau := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_2)$. При этом $1 \leq \rho \leq \tau \leq N$. Еще один ортонормированный базис в H в данном случае не требуется. Согласно (32), решение $M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}$, $t \in [0, 2\pi]$, находится из следующего соотношения:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dm_{k,j}(t) = \left([E_H - \zeta A]^{-1} x_k, x_j \right)_H, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Таким образом, в нашем случае под матрицей $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$ понимаем матрицу оператора $E_H - \zeta A$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, т. е. матрицу $A_{0,\zeta}$ из соотношения (37). Тогда $A_{0,\zeta}^{-1}$ будет матрицей оператора $(E_H - \zeta A)^{-1}$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Заметим, что $A_{0,\zeta}^{-1} = \frac{1}{h_\zeta} A_{0,\zeta}^{+}$, где h_ζ, $A_{0,\zeta}^{+}$ определяются так, как и раньше. Обозначения $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ и $A_{1,\zeta}$ имеют тот же смысл, что и ранее. Формула (43) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) = \frac{1}{h_\zeta} A_{1,\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Повторяя дословно рассуждения после формулы (43) до (45), приходим к соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) \mathcal{K} = \frac{1}{h_\zeta} \mathcal{K}^* A_{1,\zeta} \mathcal{K} = \frac{1}{h_\zeta} \mathbf{A}_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $\mathbf{A}_\zeta$ задается так же, как и в (46).

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: *формулой (47) можно пользоваться и для определенной УМТПМ (11), отбросив последнее слагаемое в правой части и учитывая вышеописанные замечания к общей процедуре построения коэффициентов.*

Пример 2. Рассмотрим УМТПМ с $N = 2$, $d = 1$, и матричными моментами $S_0 = S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что условие (14) выполнено и условие (C) теоремы 5 также выполняется. Значит, УМТПМ разрешима и является определенной. Матрица T_1 из (12) имеет следующий вид:

$$T_1 = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть H является гильбертовым пространством, построенным так, как это было описано для проблемы моментов после формулы (17), и $\{x_n\}_{n=0}^{3}$ являются элементами этого пространства со свойством (18). Применим процесс ортогонализации (33), (34) к элементам x_0, x_1, x_2, x_3.
Шаг 0. Вычисляем $n_0 = \|x_0\|_H = \sqrt{(x_0, x_0)_H} = \sqrt{\gamma_{0,0}} = 1 \neq 0$. Полагаем $y_0 = x_0$.

Шаги 1–3 приводят к $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Полагаем $\mathfrak{A} = \{y_0\}$. Пусть $u_0 := y_0 = x_0$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_0\}$. Заметим, что в нашем случае $\rho = \tau = 1$. Далее вычисляем:

$$A_{0,\zeta} = 1 - \zeta, \ h_\zeta = 1 - \zeta, \ A_{0,\zeta}^{+} = 1 = A_{1,\zeta};$$

$$\mathcal{K} = (1, 1);$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \frac{1}{1 - \zeta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, единственное решение $M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{1}$, $t \in [0, 2\pi]$, задается следующим соотношением:

$$m_{k,j}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & 0 < t \leq 2\pi \end{cases}, \qquad 0 \leq k, j \leq 1.$$

1.3. Матричная проблема моментов Гамбургера

1.3.1. Разрешимость

Матричная проблема моментов Гамбургера состоит в нахождении непрерывной слева неубывающей $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} x^n dM(x) = S_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{49}$$

где $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ является заданной последовательностью эрмитовых комплексных матриц размера $(N \times N)$. Число $N \in \mathbb{N}$ является фиксированным. Матрицы S_n называют **(матричными) моментами**. Обозначим

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{50}$$

Матрицы, имеющие такую структуру, называются **блочными ганкелевыми матрицами**. Проверим, что условие

$$\Gamma_n \geq 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{51}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости проблемы моментов (49).

Предположим, что проблема моментов (49) имеет решение M. Для произвольного элемента $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, где $f_k \in \mathbb{P}$, $k = 0, 1, ..., N-1$, вычисляя выражение $\int_{\mathbb{R}} f dM f^*$, легко убеждаемся в выполнении условия (51).

Наоборот, пусть задана проблема моментов (49) и выполнено условие (51). Обозначим

$$\Gamma = (S_{k+l})_{k,l=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n & \dots \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Полубесконечную блочную матрицу Γ называем **информационным блоком** проблемы моментов (49). Полубесконечная комплексная матрица $K = (K_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$ называется **неотрицательно определенным ядром**, если

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} K_{n,m} \xi_n \overline{\xi_m} \geq 0, \qquad \forall \xi_n \in \mathbb{C},$$

где суммы предполагаются конечными. Информационный блок Γ можно рассматривать как полубесконечную матрицу со скалярными элементами:

$$\Gamma = (\Gamma_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}, \qquad \Gamma_{n,m} \in \mathbb{C}. \tag{52}$$

Из (51) следует, что ядро Γ является неотрицательно определенным. Пусть

$$S_n = (s_n^{k,l})_{k,l=0}^{N-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad s_n^{k,l} \in \mathbb{C}.$$

В силу структуры матрицы Γ будет выполнено следующее соотношение:

$$\Gamma_{rN+j,tN+n} = s_{r+t}^{j,n}, \qquad 0 \le j,n \le N-1; \quad r,t \in \mathbb{Z}_+. \tag{53}$$

Из (53) следует, что

$$\Gamma_{a+N,b} = \Gamma_{a,b+N}, \qquad a,b \in \mathbb{Z}_+. \tag{54}$$

Действительно, если $a = rN + j$, $b = tN + n$, $0 \le j,n \le N-1$, $r,t \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\Gamma_{a+N,b} = \Gamma_{(r+1)N+j,tN+n} = s_{r+t+1}^{j,n} = \Gamma_{rN+j,(t+1)N+n} = \Gamma_{a,b+N}.$$

Как это делалось выше для усеченной матричной тригонометрической проблемы моментов, можно построить гильбертово пространство H и последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ в H, такие, что $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = H$ и

$$(x_n, x_m)_H = \Gamma_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+. \tag{55}$$

Обозначим $L := \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in L$. Предположим, что для x имеют место два представления: $x = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k$ и $x = \sum_{k=0}^\infty \beta_k x_k$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, и все α_k, β_k, кроме их конечного числа, нулевые. Используя (55) и (54), мы записываем:

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_{k+N}, x_l\right) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k (x_{k+N}, x_l) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k \Gamma_{k+N,l} = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k \Gamma_{k,l+N} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \alpha_k (x_k, x_{l+N}) = \left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k, x_{l+N}\right) = (x, x_{l+N}), \qquad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогичным образом мы получаем, что

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \beta_k x_{k+N}, x_l\right) = (x, x_{l+N}), \qquad l \in \mathbb{Z}_+,$$

и значит,

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_{k+N}, x_l\right) = \left(\sum_{k=0}^\infty \beta_k x_{k+N}, x_l\right), \qquad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку $\overline{L} = H$, мы получаем, что

$$\sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_{k+N} = \sum_{k=0}^\infty \beta_k x_{k+N}.$$

Рассмотрим следующий оператор, с областью определения L:

$$Ax = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_{k+N}, \qquad x \in L,\ x = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{56}$$

Вышеприведенные рассуждения показывают, что такое определение является корректным. Как мы видим, вновь в качестве оператора выбран оператор сдвига, как и в случае УМТПМ. Однако в случае матричной проблемы моментов Гамбургера этот оператор будет не изометрическим, а симметрическим. Действительно, для произвольных элементов $x,y \in L$, $x = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k$, $y = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n x_n$, $\alpha_k, \gamma_n \in \mathbb{C}$ выполнено:

$$(Ax, y) = \left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_{k+N}, \sum_{n=0}^\infty \gamma_n x_n\right) = \sum_{k,n=0}^\infty \alpha_k \overline{\gamma_n} (x_{k+N}, x_n) = \sum_{k,n=0}^\infty \alpha_k \overline{\gamma_n} (x_k, x_{n+N}) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k, \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_{n+N} \right) = (x, Ay).$$

Заметим также, что оператор A плотно задан в H.

Пусть $\widetilde{A} \supseteq A$ — произвольное самосопряженное расширение оператора A в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$, и $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — непрерывное слева ортогональное разложение единицы оператора $\widetilde{A}$. Рассмотрим произвольное число $a \in \mathbb{Z}_+$, $a = rN + j$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le j \le N-1$. Заметим, что

$$x_a = x_{rN+j} = Ax_{(r-1)N+j} = ... = A^r x_j.$$

Выберем также произвольное число $b \in \mathbb{Z}_+$, $b = tN+n$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le n \le N-1$. Используя (53), записываем:

$$s_{r+t}^{j,n} = \Gamma_{rN+j,tN+n} = (x_{rN+j}, x_{tN+n})_H = (A^r x_j, A^t x_n)_H = (\widetilde{A}^r x_j, \widetilde{A}^t x_n)_{\widetilde{H}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^r d\widetilde{E}_\lambda x_j, \int_{\mathbb{R}} \lambda^t d\widetilde{E}_\lambda x_n \right)_{\widetilde{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d(\widetilde{E}_\lambda x_j, x_n)_{\widetilde{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d\left(P_H^{\widetilde{H}} \widetilde{E}_\lambda x_j, x_n \right)_H.$$

Из последнего соотношения получаем, что

$$S_{r+t} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d\widetilde{M}(\lambda), \qquad r, t \in \mathbb{Z}_+, \tag{57}$$

где $\widetilde{M}(\lambda) := \left(\left(P_H^{\widetilde{H}} \widetilde{E}_\lambda x_j, x_n \right)_H \right)_{j,n=0}^{N-1}$. Полагая в соотношении (53) $t = 0$, мы видим, что $\widetilde{M}(\lambda)$ является решением проблемы моментов (49). Из свойств ортогонального разложения единицы легко следует, что матричнозначная функция $\widetilde{M}(\lambda)$ является непрерывной слева, неубывающей и $\widetilde{M}(-\infty) = 0$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49). Проблема моментов имеет решение в том и только том случае, когда выполнено условие (51), где* Γ_n *из (50).*

1.3.2. Описание решений в терминах спектральных функций

Продолжим рассмотрение матричной проблемы моментов Гамбургера (49), для которой выполнено условие (51), начатое в предыдущем пункте. Полученная формула (57) показывает, что **произвольное самосопряженное расширение оператора A порождает решение матричной проблемы моментов Гамбургера (49)**. Учитывая определение спектральной функции симметрического оператора, можно также сказать, что **произвольная спектральная функция оператора A порождает решение матричной проблемы моментов Гамбургера (49)**. Получаются ли таким образом все решения проблемы моментов (49)? Ответ на этот вопрос, как мы сейчас проверим, является утвердительным. Рассмотрим произвольное решение $\widehat{M}(x) = (\widehat{m}_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ матричной проблемы моментов Гамбургера (49). Рассмотрим пространство $L^2(\widehat{M})$ и посредством Q обозначим оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\widehat{M})$. Как и ранее, будем пользоваться обозначением $\vec{e}_k = (e_{k,0}, e_{k,1}, \ldots, e_{k,N-1})$, $e_{k,j} = \delta_{k,j}$, $0 \le j \le N-1$, для $k = 0, 1, \ldots N-1$. Множество (классов эквивалентности) функций $f \in L^2(\widehat{M})$, таких, что (соответствующий класс включает) $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, $f \in \mathbb{P}$, мы обозначаем через $\mathbb{P}^2(\widehat{M})$. Полагаем также $L_0^2(\widehat{M}) = \overline{\mathbb{P}^2(\widehat{M})}$.

Для произвольного класса эквивалентности $f \in \mathbb{P}^2(\widehat{M})$ найдется представитель вида:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{k,j} x^j \vec{e}_k, \quad \alpha_{k,j} \in \mathbb{C}.$$

Здесь и далее в подобных ситуациях суммы считаются конечными. Пусть некоторый $g \in \mathbb{P}^2(\widehat{M})$ имеет представителя

$$g(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{l,r} x^r \vec{e}_l, \quad \beta_{l,r} \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$(f,g)_{L^2(\widehat{M})} = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \int_{\mathbb{R}} x^{j+r} \vec{e}_k d\widehat{M}(x) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \int_{\mathbb{R}} x^{j+r} d\widehat{m}_{k,l}(x) = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} s_{j+r}^{k,l}. \tag{58}$$

С другой стороны, мы можем записать:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,j} x_{jN+k}, \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{l,r} x_{rN+l} \right)_H = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} (x_{jN+k}, x_{rN+l})_H =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \Gamma_{jN+k, rN+l} = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} s_{j+r}^{k,l}. \tag{59}$$

Из соотношений (58), (59) следует, что

$$(f,g)_{L^2(\widehat{M})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,j} x_{jN+k}, \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{l,r} x_{rN+l} \right)_H. \tag{60}$$

Полагаем

$$Vh = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_{k,j} x_{jN+k},$$

для $h \in \mathbb{P}^2(\widehat{M})$, с представителем $h(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{k,j} x^j \vec{e}_k$, $\gamma_{k,j} \in \mathbb{C}$. Если h имеет еще одного представителя вида $\widetilde{h}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{k,j} x^j \vec{e}_k$, $\widetilde{\gamma}_{k,j} \in \mathbb{C}$, то $\|h(x) - \widetilde{h}(x)\|_{L^2(\widehat{M})} = 0$. Пользуясь (60) для $f(x) = g(x) = h(x) - \widetilde{h}(x)$, мы получаем, что

$$0 = \| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\gamma_{k,j} - \widetilde{\gamma}_{k,j}) x_{jN+k} \|_H^2.$$

Таким образом, оператор V корректно определен и отображает множество $\mathbb{P}^2(\widehat{M})$ в H. Соотношение (60) показывает, что оператор V является изометрическим и $R(V) = L$. По непрерывности продолжаем V до изометрического отображения из $L_0^2(\widehat{M})$ на H. В частности, отметим, что

$$V x^j \vec{e}_k = x_{jN+k}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \le k \le N-1.$$

Обозначим $L^2_1(\widehat{M}) := L^2(\widehat{M}) \ominus L^2_0(\widehat{M})$, и $U := V \oplus E_{L^2_1(\widehat{M})}$. Оператор U отображает изометрически пространство $L^2(\widehat{M})$ на $H \oplus L^2_1(\widehat{M}) =: \widehat{H}$. Полагаем

$$\widehat{A} := UQU^{-1}.$$

Оператор $\widehat{A}$ является самосопряженным в $\widehat{H}$. Пусть $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — его непрерывное слева ортогональное разложение единицы. Заметим, что

$$UQU^{-1}x_{jN+k} = VQV^{-1}x_{jN+k} = VQx^j\vec{e}_k = Vx^{j+1}\vec{e}_k = x_{(j+1)N+k} = x_{jN+k+N} =$$

$$= Ax_{jN+k}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \le k \le N-1.$$

Пользуясь линейностью, мы получаем, что

$$UQU^{-1}x = Ax, \qquad x \in L = D(A),$$

и значит, $\widehat{A} \supseteq A$. Итак, оператор $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением оператора A в пространстве $\widehat{H}$. Как отмечалось в начале этого пункта, такому расширению соответствует некоторое решение матричной проблемы моментов Гамбургера. Мы теперь покажем, что это решение есть в точности функция $\widehat{M}$.

Выберем произвольное число $z \in \mathbb{R}_e$ и запишем:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d(\widehat{E}_\lambda x_k, x_j)_{\widehat{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\widehat{E}_\lambda x_k, x_j \right)_{\widehat{H}} = \left(U^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\widehat{E}_\lambda x_k, U^{-1}x_j \right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dU^{-1}\widehat{E}_\lambda U\vec{e}_k, \vec{e}_j \right)_{L^2(\widehat{M})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dE_\lambda \vec{e}_k, \vec{e}_j \right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} \vec{e}_k d\widehat{M}(t) \vec{e}_j = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\widehat{m}_{k,j}(t),$$

где $0 \le k, j \le N-1$. Пользуясь формулой обращения Стилтьеса–Перрона, заключаем, что

$$\widehat{m}_{k,j}(\lambda) = (P^{\widehat{H}}_H \widehat{E}_\lambda x_k, x_j)_H, \quad 0 \le k, j \le N-1.$$

Проверим теперь, что индекс дефекта оператора A равен (m, n), $0 \le m, n \le N$. Выберем произвольный элемент $u \in L$, $u = \sum_{k=0}^\infty c_k x_k$, $c_k \in \mathbb{C}$. Предположим, что $c_k = 0$, $k \ge N+R+1$, для некоторого $R \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$-zd_k = c_k, \qquad k = 0, 1, ..., N-1; \tag{61}$$

$$d_{k-N} - zd_k = c_k, \qquad k = N, N+1, N+2, ..., \tag{62}$$

где $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ являются неизвестными комплексными числами, $z \in \mathbb{R}_e$ — фиксированный параметр. Положим

$$d_k = 0, \qquad k \ge R+1;$$

$$d_j = c_{N+j} + zd_{N+j}, \qquad j = R, R-1, R-2, ..., 0.$$

Для таких чисел $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, все уравнения в (62) будут выполнены, но уравнения (61) не обязательно выполняются. Обозначим $v = \sum_{k=0}^\infty d_k x_k$, $v \in L$. Заметим, что

$$(A - zE_H)v = \sum_{k=0}^\infty (d_{k-N} - zd_k)x_k,$$

где $d_{-1} = d_{-2} = ... = d_{-N} = 0$. Согласно построения d_k, мы имеем

$$(A - zE_H)v - u = \sum_{k=0}^{\infty}(d_{k-N} - zd_k - c_k)x_k = \sum_{k=0}^{N-1}(-zd_k - c_k)x_k;$$

$$u = (A - zE_H)v + \sum_{k=0}^{N-1}(zd_k + c_k)x_k, \qquad u \in L. \tag{63}$$

Обозначим $H_z := \overline{(A - zE_H)L} = (\overline{A} - zE_H)D(\overline{A})$, $y_k := x_k - P_{H_z}^H x_k$, $k = 0, 1, ..., N-1$, и $H_0 := \mathrm{span}\{y_k\}_{k=0}^{N-1}$. Размерность H_0 не превосходит N, и $H_0 \perp H_z$. Из (63) следует, что элемент $u \in L$ может быть представлен в следующем виде:

$$u = u_1 + u_2, \qquad u_1 \in H_z, \quad u_2 \in H_0.$$

Мы получаем, что $L \subseteq H_z \oplus H_0$; $H \subseteq H_z \oplus H_0$, и $H = H_z \oplus H_0$. Таким образом, H_0 является соответствующим дефектным подпространством и, значит, дефектные числа оператора A не превосходят N.

Теорема 8. *Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49) и выполнено условие (51). Пусть оператор A построен для проблемы моментов так, как в (56). Все решения проблемы моментов имеют следующий вид:*

$$M(\lambda) = (m_{k,j}(\lambda))_{k,j=0}^{N-1}, \quad m_{k,j}(\lambda) = (\mathbf{E}_\lambda x_k, x_j)_H, \tag{64}$$

где $\mathbf{E}_\lambda$ является непрерывной слева спектральной функцией оператора A. Кроме того, соответствие между всеми непрерывными слева спектральными функциями оператора A и всеми решениями проблемы моментов взаимно однозначно.

Доказательство. Остается лишь показать, что разные непрерывные слева спектральные функции оператора A порождают разные решения проблемы моментов (49). Действуя от противного, предположим, что две разные непрерывные слева спектральные функции порождают одно и то же решение проблемы моментов. Согласно определения спектральной функции, это означает, что существуют два самосопряженных расширения $A_j \supseteq A$, в гильбертовых пространствах $H_j \supseteq H$, такие, что $P_H^{H_1} E_{1,\lambda} \neq P_H^{H_2} E_{2,\lambda}$, и

$$(P_H^{H_1} E_{1,\lambda} x_k, x_j)_H = (P_H^{H_2} E_{2,\lambda} x_k, x_j)_H, \qquad 0 \le k, j \le N-1, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\{E_{n,\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ являются ортогональными непрерывными слева разложениями единицы операторов A_n, $n = 1, 2$. Обозначим $L_N := \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=0,N-1}$. Пользуясь линейностью, мы получаем

$$(P_H^{H_1} E_{1,\lambda} x, y)_H = (P_H^{H_2} E_{2,\lambda} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{65}$$

Обозначим через $R_{n,\lambda}$ резольвенту оператора A_n, и $\mathbf{R}_{n,\lambda} := P_H^{H_n} R_{n,\lambda}$, $n = 1, 2$. Из (65), (2) следует, что

$$(\mathbf{R}_{1,\lambda} x, y)_H = (\mathbf{R}_{2,\lambda} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad \lambda \in \mathbb{R}_e. \tag{66}$$

Выберем произвольное число $z \in \mathbb{R}_e$ и рассмотрим соответствующее подпространство H_z. Поскольку

$$R_{j,z}(A - zE_H)x = (A_j - zE_{H_j})^{-1}(A_j - zE_{H_j})x = x, \qquad x \in L = D(A),$$

то

$$R_{1,z}u = R_{2,z}u \in H, \qquad u \in H_z;$$

$$\mathbf{R}_{1,z}u = \mathbf{R}_{2,z}u, \qquad u \in H_z,\ z \in \mathbb{R}_e. \tag{67}$$

Мы можем записать

$$(\mathbf{R}_{n,z}x, u)_H = (R_{n,z}x, u)_{H_n} = (x, R_{n,\overline{z}}u)_{H_n} = (x, \mathbf{R}_{n,\overline{z}}u)_H, \qquad x \in L_N,\ u \in H_{\overline{z}},\ n = 1, 2,$$

и мы получаем

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, u)_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, u)_H, \qquad x \in L_N,\ u \in H_{\overline{z}}. \tag{68}$$

Согласно (63), произвольный элемент $y \in L$ может быть представлен в виде $y = y_{\overline{z}} + y'$, где $y_{\overline{z}} \in H_{\overline{z}}$ и $y' \in L_N$. Используя (66) и (68), мы получаем

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, y)_H = (\mathbf{R}_{1,z}x, y_{\overline{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y_{\overline{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y)_H, \qquad x \in L_N,\ y \in L.$$

Поскольку $\overline{L} = H$, то

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L_N,\ z \in \mathbb{R}_e. \tag{69}$$

Для произвольного $x \in L$, $x = x_z + x'$, $x_z \in H_z$, $x' \in L_N$, используя соотношения (67), (69), записываем:

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{1,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L,\ z \in \mathbb{R}_e,$$

и

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in H,\ z \in \mathbb{R}_e.$$

Согласно (2), это означает, что спектральные функции совпадают. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

1.3.3. Аналитическое описание решений

С помощью установленной в предыдущем пункте теоремы 8 и формулы Штрауса обобщенных резольвент симметрического оператора мы получаем следующее описание решений матричной проблемы моментов Гамбургера.

Теорема 9. *Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49) и выполнено условие (51). Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H, такую, что выполнено соотношение (55) и $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = H$. Пусть A — линейный оператор с $D(A) = \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, определенный с помощью равенств*

$$Ax_k = x_{k+N}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Все решения проблемы моментов имеют следующий вид:

$$M(x) = (m_{k,j}(x))_{k,j=0}^{N-1},$$

где $m_{k,j}$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\int_R \frac{1}{x-\lambda} dm_{k,j}(x) = ((A_{F(\lambda)} - \lambda E_H)^{-1} x_k, x_j)_H, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{70}$$

Здесь $F(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{C}_+; \mathcal{N}_i(\overline{A}), \mathcal{N}_{-i}(\overline{A}))$, а $A_{F(\lambda)}$ является квазисамосопряженным расширением оператора $\overline{A}$, задаваемым $F(\lambda)$.

С другой стороны, произвольной $F(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{C}_+; \mathcal{N}_i(\overline{A}), \mathcal{N}_{-i}(\overline{A}))$ посредством соотношения (70) отвечает некоторое решение матричной проблемы моментов Гамбургера. Кроме того, соответствие между всеми $\mathcal{S}(\mathbb{C}_+; \mathcal{N}_i(\overline{A}), \mathcal{N}_{-i}(\overline{A}))$ и решениями проблемы моментов, устанавливаемое посредством соотношения (70), является взаимно однозначным.

Доказательство. Остается проверить последнее утверждение теоремы. Различные функции $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{C}_+;\mathcal{N}_i(\overline{A}),\mathcal{N}_{-i}(\overline{A}))$ порождают различные обобщенные резольвенты $\mathbf{R}_1(\lambda)$ и $\mathbf{R}_2(\lambda)$ оператора A. Пусть $\mathbf{E}_1(\lambda)$ и $\mathbf{E}_2(\lambda)$ — соответствующие непрерывные слева спектральные функции оператора A. Действуя от противного, предположим, что функции $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ отвечают одному и тому же решению проблемы моментов $M(x) = (m_{k,j}(x))_{k,j=0}^{N-1}$. Согласно (70), это означает, что

$$\int_R \frac{1}{x-\lambda} dm_{k,j}(x) = (\mathbf{R}_1(\lambda)x_k, x_j)_H = (\mathbf{R}_2(\lambda)x_k, x_j)_H.$$

Согласно формулы обращения Стилтьеса–Перрона, мы получаем:

$$m_{k,j}(x) = (\mathbf{E}_1(\lambda)x_k, x_j)_H = (\mathbf{E}_2(\lambda)x_k, x_j)_H.$$

Значит, разные спектральные функции оператора A порождают одно и то же решение проблемы моментов. Это противоречит теореме 8, и полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

1.3.4. Условия определенности и формула Неванлинны

Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49) и выполнено условие (51). Установим условия определенности проблемы моментов. Из соотношений (2) и (64) следует, что формула

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dm_{k,j}(\lambda) = (\mathbf{R}_z x_k, x_j)_H, \quad 0 \le k, j \le N-1, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \tag{71}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми обобщенными резольвентами оператора A и всеми решениями проблемы моментов (49). Положим

$$\begin{gathered} y_k^- := (A - iE_H)x_k = x_{k+N} - ix_k, \\ y_k^+ := (A + iE_H)x_k = x_{k+N} + ix_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+; \\ L^- := \mathrm{Lin}\{y_k^-\}_{k=0}^\infty = (A - iE_H)D(A), \quad L^+ := \mathrm{Lin}\{y_k^+\}_{k=0}^\infty = (A + iE_H)D(A), \\ H^- := \overline{L^-} = (\overline{A} - iE_H)D(\overline{A}), \quad H^+ := \overline{L^+} = (\overline{A} + iE_H)D(\overline{A}). \end{gathered} \tag{72}$$

Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта к последовательности $\{y_k^-\}_{k=0}^\infty$, удаляя линейно зависимые элементы, если таковые будут появляться. Этот процесс аналогичен процессам ортогонализации с пропуском линейно зависимых элементов, который применялся для УМТПМ. В результате мы получим множество $\mathfrak{A}^- = \{u_k^-\}_{k=0}^{\tau^- -1}$, $0 \le \tau^- \le +\infty$. Случай $\tau^- = 0$ означает, что $y_k^- = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, и $\mathfrak{A}^-$ является пустым множеством.

Аналогичным образом мы применяем процесс ортогонализации Грама–Шмидта к последовательности $\{y_k^+\}_{k=0}^\infty$ и получим множество $\mathfrak{A}^+ = \{u_k^+\}_{k=0}^{\tau^+ -1}$, $0 \le \tau^+ \le +\infty$. Случай $\tau^+ = 0$ означает, что $y_k^+ = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, и $\mathfrak{A}^- = \emptyset$.

В случае непустоты множество $\mathfrak{A}^\pm$ образует ортонормированный базис в $H^\pm$ соответственно. Обозначим через $\nu^\pm(k)$ индекс последнего использованного $y_j^\pm$ при построении $u_k^\pm$. Другими словами, $\nu^\pm(k)$ является тем номером шага в процессе ортогонализации Грама–Шмидта, считая от нуля и включая шаги, которые приводили к линейно зависимым элементам, на котором был построен элемент $u_k^\pm$. Отметим, что, согласно построению, каждый элемент $u_k^\pm$, $k \in \overline{0, \tau^\pm - 1}$, является линейной комбинацией элементов $y_j^\pm$, $0 \le j \le \nu^\pm(k)$, соответственно. Пусть

$$u_k^\pm = \sum_{j=0}^{\nu^\pm(k)} \xi_{k;j}^\pm y_j^\pm, \qquad \xi_{k;j}^\pm \in \mathbb{C}, \quad k \in \overline{0, \tau^\pm - 1}. \tag{73}$$

Согласно (55) мы можем записать

$$(x_n, u_k^{\pm})_H = \sum_{j=0}^{\nu^{\pm}(k)} \overline{\xi_{k;j}^{\pm}} (x_n, y_j^{\pm})_H = \sum_{j=0}^{\nu^{\pm}(k)} \overline{\xi_{k;j}^{\pm}} (x_n, x_{j+N} \pm i x_j)_H =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu^{\pm}(k)} \overline{\xi_{k;j}^{\pm}} (\Gamma_{n,j+N} \pm i \Gamma_{n,j}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \overline{0, \tau^{\pm} - 1}. \tag{74}$$

Из представления (72) можно заключить, что условие $\tau^- = 0$ ($\tau^+ = 0$) равносильно условию $D(A) = \{0\}$, и, значит, равносильно условию $H = \{0\}$. Согласно (53),(55), условие $H = \{0\}$ эквивалентно условию $S_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Подчеркнем, что числа $\xi_{k;j}$ в (73) могут быть подсчитаны явно с использованием соотношений (53) и (55). Кроме того, процессы ортогонализации, которые используются или встретятся в дальнейшем, основаны на использовании соотношений (53) и (55). Действительно, любая норма элемента или скалярное произведение, возникающее при ортогонализации, выражаются через заданные моменты.

Теорема 10. *Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49) и выполнено условие (51), где Γ_n из (50). Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H построен так, как в (56). Следующие условия являются эквивалентными:*

(A) *проблема моментов (49) является определенной;*

(B) *одно из дефектных чисел оператора A равно нулю (или оба дефектных числа нулевые);*

(C) $S_r = 0$, $\forall r \in \mathbb{Z}_+$, *или*, $\exists S_l \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}_+$, *и выполнено одно из следующих условий (или оба эти условия выполнены):*

(a) Для каждого n, $0 \leq n \leq N-1$, выполняется следующее условие:

$$\Gamma_{n,n} = \sum_{k=0}^{\tau^- - 1} \left| \sum_{j=0}^{\nu^-(k)} \overline{\xi_{k;j}^{-}} (\Gamma_{n,j+N} - i\Gamma_{n,j}) \right|^2;$$

(b) Для каждого n, $0 \leq n \leq N-1$, выполнено следующее условие:

$$\Gamma_{n,n} = \sum_{k=0}^{\tau^+ - 1} \left| \sum_{j=0}^{\nu^+(k)} \overline{\xi_{k;j}^{+}} (\Gamma_{n,j+N} + i\Gamma_{n,j}) \right|^2.$$

Здесь $\Gamma_{\cdot,\cdot}$ взяты из (52), а $\xi_{\cdot;\cdot}^{\pm}$ – из (73).

Если вышеприведенные условия выполнены, то единственное решение проблемы моментов (49) находится из следующего соотношения:

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \quad m_{k,j}(t) = (E_t x_k, x_j)_H,$$

где E_t является единственной непрерывной слева спектральной функцией оператора A.

Доказательство. (A)$\Rightarrow$(B). Если оба дефектных числа больше нуля, то мы можем выбрать единичные векторы $u_1 \in \mathcal{N}_i(\overline{A})$ и $u_2 \in \mathcal{N}_{-i}(\overline{A})$. Полагаем

$$F(\lambda)(cu_1 + u) = cu_2, \qquad c \in \mathbb{C},\ u \in \mathcal{N}_i(\overline{A}) \ominus \mathrm{Lin}\{u_1\}.$$

С другой стороны, мы полагаем $\widetilde{F}(\lambda) \equiv 0$. Функции $F(\lambda)$ и $\widetilde{F}(\lambda)$ порождают различные решения проблемы моментов (49) посредством соотношения (70).
(B)$\Rightarrow$(A). Если одно из дефектных чисел равно нулю, то единственной допустимой операторнозначной функцией $F(\lambda)$ в соотношении (70) является функция $F(\lambda) \equiv 0$.
(B)$\Rightarrow$(C). Если $H = \{0\}$, то условие (C) очевидным образом выполняется. Пусть $H \neq \{0\}$. Заметим, что, согласно (55) и (74), условие (C),(a) может быть записано в следующем виде:

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\tau^- -1} \left|(x_n, u_k^-)_H\right|^2, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1;$$

а условие (C),(b) равносильно условию

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\tau^+ -1} \left|(x_n, u_k^+)_H\right|^2, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Значит, условие (C),(a) равносильно условиям:

$$x_n \in H^-, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1; \tag{75}$$

а условие (C),(b) эквивалентно условию

$$x_n \in H^+, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{76}$$

Согласно (63), каждый элемент L принадлежит линейной оболочке элементов $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$, $\{y_k^-\}_{k=0}^{\infty}$, как и линейной оболочке элементов $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$, $\{y_k^+\}_{k=0}^{\infty}$. Следовательно, условие (75) равносильно условию

$$H = H^-, \tag{77}$$

а условие (76) равносильно условию

$$H = H^+. \tag{78}$$

Поскольку одно из дефектных чисел равно нулю, то либо (77), либо (78) выполнено.
(C)$\Rightarrow$(B). Если $H = \{0\}$, то условие (B) выполнено. Предположим теперь, что $H \neq \{0\}$. Если выполняется условие (C),(a) (условие (C),(b)), то в соответствии с предыдущими рассуждениями перед (77) мы получаем $H = H^-$ (соответственно $H = H^+$). Значит, одно из дефектных чисел оператора A равно нулю.

Последнее утверждение теоремы следует непосредственно из формулы (64). $\square$

Формула (70), полученная выше, дает аналитическое описание решений матричной проблемы моментов Гамбургера. Однако, как и в случае УМТПМ, хотелось бы иметь формулу неванлинновского типа, содержащую аналитическую матричнозначную функцию-параметр и остальные элементы которой явно вычислялись бы по заданным моментам. Впрочем, в случае проблем моментов с бесконечным числом заданных моментов подобные явные вычисления содержат бесконечное число шагов. Последнее обстоятельство затрудняет построение численных примеров решений (в том числе и в скалярном случае).

Мы продолжим наши построения, начатые перед формулировкой теоремы 10. В дальнейшем будем предполагать, что *проблема моментов (49) является неопределенной.* Пусть дефектные числа оператора A равны $\delta = \delta(A) = \dim H \ominus H^-$, и $\omega = \omega(A) = \dim H \ominus H^+$, где $\delta, \omega \geq 1$.

Для упрощения обозначений мы полагаем $\tau := \tau^-$ и

$$u_k := u_k^-, \qquad k \in \overline{0, \tau - 1}.$$

Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам

$$\{u_k\}_{k=0}^{\tau-1}, \{x_n\}_{n=0}^{N-1}.$$

Отметим, что элементы $\{u_k\}_{k=0}^{\tau-1}$ уже являются ортонормированными. В результате мы получим ортонормированный набор векторов в H:

$$\mathfrak{A}_u := \{u_k\}_{k=0}^{\tau-1} \cup \{u'_l\}_{l=0}^{\delta-1}.$$

При этом $\mathfrak{A}' := \{u'_l\}_{l=0}^{\delta-1}$ является ортонормированным базисом в $H \ominus H^-$.

Рассмотрим преобразование Кэли оператора $\overline{A}$:

$$V = V_{\overline{A}} = (\overline{A} + iE_H)(\overline{A} - iE_H)^{-1} = E_H + 2i(\overline{A} - iE_H)^{-1}.$$

Оператор V является замкнутым изометрическим оператором с областью определения H^- и областью значений H^+. Обозначим

$$v_k := Vu_k, \qquad k \in \overline{0, \tau - 1}.$$

Согласно (73), мы видим, что

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \xi_{k;j}^- V y_j^- = \sum_{j=0}^{k} \xi_{k;j}^- y_j^+, \qquad k \in \overline{0, \tau - 1}.$$

Отметим, что

$$\mathfrak{A}_v^- := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$$

является ортонормированным базисом в H^+.

Применим теперь процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам

$$\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}, \{x_n\}_{n=0}^{N-1}.$$

Элементы $\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$ уже являются ортонормированными. Мы получим некоторый другой ортонормированный базис в H:

$$\mathfrak{A}_v := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1} \cup \{v'_l\}_{l=0}^{\omega-1}.$$

Множество $\mathfrak{A}'_v := \{v'_l\}_{l=0}^{\omega-1}$ является ортонормированным базисом в $H \ominus H^+$.

Пусть $\mathbf{R}_\lambda$ — произвольная обобщенная резольвента оператора A. Проверим, что

$$(\mathbf{R}_z x_k, x_j)_H =$$

$$= \frac{1}{z^2+1}(\mathbf{R}_z y_k^-, y_j^-)_H - \frac{1}{z^2+1}(x_{k+N}, x_j)_H - \frac{z}{z^2+1}(x_k, x_j)_H,$$
$$z \in \mathbb{C}_+ \backslash \{i\}, \quad 0 \leq k, j \leq N-1. \tag{79}$$

Пусть $\widetilde{A} \supseteq A$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$, такой, что $P_H^{\widetilde{H}} R_z(\widetilde{A}) = \mathbf{R}_z$, $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Тогда

$$(\mathbf{R}_z x_k, x_j)_H = (R_z(\widetilde{A})(A - iE_H)^{-1}(A - iE_H)x_k, x_j)_{\widetilde{H}} =$$

$$= (R_z(\widetilde{A})R_i(\widetilde{A})y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}} = \frac{1}{z-i}((R_z(\widetilde{A}) - R_i(\widetilde{A}))y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}} =$$

$$= \frac{1}{z-i}(R_z(\widetilde{A})y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}} - \frac{1}{z-i}(x_k, x_j)_{\widetilde{H}}; \tag{80}$$

$$(R_z(\widetilde{A})y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}} = (R_z(\widetilde{A})y_k^-, R_i(\widetilde{A})y_j^-)_{\widetilde{H}} =$$

$$= (R_{-i}(\widetilde{A})R_z(\widetilde{A})y_k^-, y_j^-)_{\widetilde{H}} = -\frac{1}{i+z}((R_{-i}(\widetilde{A}) - R_z(\widetilde{A}))y_k^-, y_j^-)_{\widetilde{H}} =$$

$$= -\frac{1}{i+z}(y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}} + \frac{1}{i+z}(\mathbf{R}_z y_k^-, y_j^-)_{\widetilde{H}}.$$

Подставляя последнее выражение для $(R_z(\widetilde{A})y_k^-, x_j)_{\widetilde{H}}$ в правую часть (80), мы получим соотношение (79).

Обобщенные резольвенты операторов V и $\overline{A}$ связаны следующим соотношением:

$$(1-\zeta)\mathbf{R}_\zeta(V) = E_H + (z-i)\mathbf{R}_z(\overline{A}), \qquad z \in \mathbb{C}_+,\ \zeta = \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}. \tag{81}$$

Это следует из аналогичного соотношения, записанного для произвольного унитарного расширения U оператора V без ненулевых неподвижных элементов и его (обратного) преобразования Кэли – самосопряженного оператора $\widetilde{A}$. В случае плотно заданного симметрического оператора A ненулевые неподвижные элементы перпендикулярны исходному пространству и их можно отбросить, сузив таким образом произвольное унитарное расширение до унитарного расширения U без ненулевых неподвижных элементов и порождающего ту же обобщенную резольвенту.

При этом непосредственно видно, что соответствие, устанавливаемое с помощью (81) между обобщенными резольвентами оператора V и обобщенными резольвентами оператора $\overline{A}$, взаимно однозначно. Тогда

$$\mathbf{R}_z(\overline{A}) = \frac{2i}{z^2+1}\mathbf{R}_{\frac{z-i}{z+i}}(V) - \frac{1}{z-i}E_H, \qquad z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}. \tag{82}$$

Используя соотношения (82), (79) и (55), мы получаем

$$(\mathbf{R}_z x_k, x_j)_H = \frac{2i}{(z^2+1)^2}(\mathbf{R}_{\frac{z-i}{z+i}}(V_{\overline{A}})y_k^-, y_j^-)_H - \frac{1}{(z^2+1)(z-i)}\varphi_{j,k}(z),$$

$$z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \quad 0 \le k, j \le N-1, \tag{83}$$

где

$$\varphi_{j,k}(z) := \Gamma_{k+N,j+N} - i\Gamma_{k+N,j} - i\Gamma_{k,j+N} + \Gamma_{k,j} + (z-i)\Gamma_{k+N,j} + z(z-i)\Gamma_{k,j} =$$

$$= \Gamma_{k+N,j+N} - i\Gamma_{k,j+N} + (z-2i)\Gamma_{k+N,j} + (z^2 - iz + 1)\Gamma_{k,j},\ z \in \mathbb{C}_+.$$

Согласно (83) и формуле Чумакина для обобщенных резольвент изометрического оператора, мы получаем

$$(\mathbf{R}_z x_k, x_j)_H = \frac{2i}{(z^2+1)^2}\left(\left[E - \frac{z-i}{z+i}(V \oplus \Phi_{\frac{z-i}{z+i}})\right]^{-1} y_k^-, y_j^-\right)_H -$$

$$-\frac{1}{(z^2+1)(z-i)}\varphi_{j,k}(z), \qquad z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \quad 0 \le k, j \le N-1, \tag{84}$$

где $\Phi_\cdot \in \mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus H^-, H \ominus H^+)$.

Из (71) и (84) мы получаем, что формула

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dm_{k,j}(\lambda) =$$

$$= \frac{2i}{(z^2+1)^2} \left(\left[E - \frac{z-i}{z+i} (V \oplus \Phi_{\frac{z-i}{z+i}}) \right]^{-1} y_k^-, y_j^- \right)_H - \frac{1}{(z^2+1)(z-i)} \varphi_{j,k}(z),$$

$$0 \le k, j \le N-1, \quad z \in \mathbb{C}_+ \backslash \{i\}, \tag{85}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми функциями $\Phi.$ из $\mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus H^-, H \ominus H^+)$ и всеми решениями проблемы моментов (49).

Формула (85) оказывается более удобной, чем формула (70), для получения формулы неванлинновского типа для проблемы моментов (49). В частности, это связано с тем, что формула (70) использует неограниченные операторы, для которых матричное представление не является эффективным. Кроме того, выше мы с помощью тождества Гильберта для резольвенты перешли в скалярных произведениях к элементам $y_k^\pm$. Это сделано для того, чтобы при использовании формулы Фробениуса в дальнейшем построении использовать лишь один блок обратной матрицы.

Обозначим через $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$ матрицу оператора $E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)$ в базисе $\mathfrak{A}_u$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Здесь $\Phi_\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{D}; H \ominus H^-, H \ominus H^+)$. Тогда

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & B_{0,\zeta}(\Phi) \\ C_{0,\zeta} & D_{0,\zeta}(\Phi) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)] u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} = \left((u_k - \zeta V u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} =$$

$$= I_\tau - \zeta \left((v_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1}, \tag{86}$$

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)] u_k', u_j)_H \right)_{0 \le j \le \tau-1,\ 0 \le k \le \delta-1} =$$

$$= \left((u_k' - \zeta \Phi_\zeta u_k', u_j)_H \right)_{0 \le j \le \tau-1,\ 0 \le k \le \delta-1} =$$

$$= -\zeta \left((\Phi_\zeta u_k', u_j)_H \right)_{0 \le j \le \tau-1,\ 0 \le k \le \delta-1},$$

$$C_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)] u_k, u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \tau-1} =$$

$$= \left((u_k - \zeta V u_k, u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \tau-1} =$$

$$= -\zeta \left((v_k, u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \tau-1}, \tag{87}$$

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)] u_k', u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \delta-1} =$$

$$= \left((u_k' - \zeta \Phi_\zeta u_k', u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \delta-1} =$$

$$= I_\delta - \zeta \left((\Phi_\zeta u_k', u_j')_H \right)_{0 \le j \le \delta-1,\ 0 \le k \le \delta-1}, \ \zeta \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что матрицы $A_{0,\zeta}, C_{0,\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, могут быть явно вычислены, если использовать соотношения (55) и (53).

Обозначим посредством F_ζ, $\zeta \in \mathbb{D}$, матрицу оператора Φ_ζ, действующего из $H \ominus H^-$ в $H \ominus H^+$, относительно базисов $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}_v'$:

$$F_\zeta = (f_\zeta(j,k))_{0 \le j \le \omega-1,\ 0 \le k \le \delta-1},$$

$$f_\zeta(j,k) := (\Phi_\zeta u'_k, v'_j)_H.$$

Тогда

$$\Phi_\zeta u'_k = \sum_{l=0}^{\omega-1} f_\zeta(l,k) v'_l, \quad 0 \le k \le \delta - 1,$$

и

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta \left(\left(\sum_{l=0}^{\omega-1} f_\zeta(l,k) v'_l, u_j \right)_H \right)_{0\le j\le \tau-1,\ 0\le k\le \delta-1} =$$

$$= -\zeta \left(\sum_{l=0}^{\omega-1} (v'_l, u_j)_H \, f_\zeta(l,k) \right)_{0\le j\le \tau-1,\ 0\le k\le \delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Полагаем

$$W := \left((v'_l, u_j)_H \right)_{0\le j\le \tau-1,\ 0\le l\le \omega-1}. \tag{88}$$

Тогда

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta W F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Мы можем записать:

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta \left(\left(\sum_{l=0}^{\omega-1} f_\zeta(l,k) v'_l, u'_j \right)_H \right)_{0\le j\le \delta-1,\ 0\le k\le \delta-1} =$$

$$= I_\delta - \zeta \left(\sum_{l=0}^{\omega-1} \left(v'_l, u'_j\right)_H f_\zeta(l,k) \right)_{0\le j\le \delta-1,\ 0\le k\le \delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Положим

$$T := \left(\left(v'_l, u'_j\right)_H \right)_{0\le j\le \delta-1,\ 0\le l\le \omega-1}. \tag{89}$$

Тогда

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta T F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему блочному представлению матрицы $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$:

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & -\zeta W F_\zeta \\ C_{0,\zeta} & I_\delta - \zeta T F_\zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $A_{0,\zeta}$, $C_{0,\zeta}$ заданы в (86), (87), а W, T задаются в (88), (89).

Рассмотрим теперь блочное представление оператора $E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta)$ относительно разложения $H^- \oplus (H \ominus H^-)$:

$$E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{0,\zeta} & \mathcal{B}_{0,\zeta}(\Phi) \\ \mathcal{C}_{0,\zeta} & \mathcal{D}_{0,\zeta}(\Phi) \end{pmatrix}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{90}$$

Конечно, матрицы операторов $\mathcal{A}_{0,\zeta}$, $\mathcal{B}_{0,\zeta}$, $\mathcal{C}_{0,\zeta}$, $\mathcal{D}_{0,\zeta}$ являются матрицами $A_{0,\zeta}$, $B_{0,\zeta}$, $C_{0,\zeta}$, $D_{0,\zeta}$ соответственно. Матрица $A_{0,\zeta}$ является обратимой, поскольку оператор $\mathcal{A}_{0,\zeta} = P_{H^-}(E_H - \zeta V) P_{H^-} = E_{H^-} - \zeta P_{H^-} V P_{H^-}$ обратим при $\zeta \in \mathbb{D}$. Рассмотрим следующий оператор:

$$V_0 := P_{H^-} V P_{H^-}.$$

Матрицу оператора V_0 в базисе $\mathfrak{A}^-$ мы обозначим через $\mathfrak{V}$:

$$\mathfrak{V} = \left((v_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1}.$$

Заметим, что пользуясь определениями v_k, u_j, элементы матрицы $\mathfrak{V}$ можно явно вычислить с помощью заданных моментов. Для резольвенты оператора V_0 справедливо следующее соотношение:

$$\mathcal{R}_\zeta(V_0) = \mathcal{A}_{0,\zeta}^{-1} = E_{H^-} + \sum_{k=1}^{\infty} V^k \zeta^k, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Для соответствующих матриц выполнено:

$$A_{0,\zeta}^{-1} = I_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{V}_k \zeta^k, \qquad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{91}$$

где

$$\mathfrak{V}_k := \mathfrak{V}^k, \qquad k \in \mathbb{Z}^+, \qquad I_\infty = (\delta_{k,l})_{k,l=0}^{\infty}.$$

Под сходимостью в (91) понимается сходимость соответствующих элементов матриц.

Формула Фробениуса для обращения блочной матрицы является справедливой и для блочного представления ограниченных операторов.

Предложение 2. *Пусть M — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, $D(M) = H$. Предположим, что задано некоторое разложение пространства H:*

$$H = H_1 \oplus H_2, \tag{92}$$

где H_1 и H_2 — подпространства в H, и оператор M имеет следующее блочное представление относительно этого разложения:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{93}$$

где $A = P_{H_1} M P_{H_1}$: $H_1 \mapsto H_1$; $B = P_{H_1} M P_{H_2}$: $H_2 \mapsto H_1$; $C = P_{H_2} M P_{H_1}$: $H_1 \mapsto H_2$; $D = P_{H_2} M P_{H_2}$: $H_2 \mapsto H_2$. Предположим, что оператор A имеет ограниченный обратный, определенный на всем H_1. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если оператор $\mathcal{H} = D - CA^{-1}B$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем H_2, то оператор M имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве H, и M^{-1} имеет следующее блочное представление относительно разложения (92):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\mathcal{H}^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\mathcal{H}^{-1} \\ -\mathcal{H}^{-1}CA^{-1} & \mathcal{H}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{94}$$

(ii) Если оператор M имеет ограниченный обратный, определенный на всем H, то оператор $\mathcal{H} = D - CA^{-1}B$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве H_2, а обратный оператор M^{-1} имеет блочное представление (94) относительно разложения (92).

Доказательство. (i): в данном случае оператор, задаваемый блочным представлением в (94), определен на всем пространстве H и ограничен. То, что этот оператор является обратным к оператору M, проверяется непосредственным перемножением соответствующих блочных представлений операторов.
(ii): проверим, что оператор $\mathcal{H}$ обратим. Действуя от противного, предположим, что существует ненулевой элемент h в H_2: $\mathcal{H}h = 0$. Обозначим $u = -A^{-1}Bh$. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = 0. \tag{95}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{H_1} & 0 \\ -CA^{-1} & E_{H_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

а оператор $\begin{pmatrix} E_{H_1} & 0 \\ -CA^{-1} & E_{H_2} \end{pmatrix}$ имеет ограниченный обратный оператор, определенный на всем H, равный $\begin{pmatrix} E_{H_1} & 0 \\ CA^{-1} & E_{H_2} \end{pmatrix}$. Значит, оператор $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix}$ имеет ограниченный обратный оператор, определенный на всем H. Это противоречит соотношению (95). Итак, оператор $\mathcal{H}$ обратим. Далее, поскольку $R\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix} = H$, то для произвольного элемента $\widetilde{h} \in H_2$ найдутся элементы $u_1 \in H_1$ и $h_2 \in H_2$, такие, что:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_1 + Bh_2 \\ \mathcal{H}h_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $R(\mathcal{H}) = H_2$. Поскольку оператор $\mathcal{H}^{-1}$ замкнут и определен на всем пространстве H_2, мы заключаем, что $\mathcal{H}^{-1}$ ограничен. Применяя уже доказанную часть (i) предложения, мы получаем, что обратный оператор M^{-1} имеет блочное представление (94) относительно разложения (92). $\Box$

Применяя предложение 2, (ii) мы получаем, что

$$(E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta))^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{0,\zeta}^{-1} + \mathcal{A}_{0,\zeta}^{-1}\mathcal{B}_{0,\zeta}\mathcal{H}_\zeta^{-1}\mathcal{C}_{0,\zeta}\mathcal{A}_{0,\zeta}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

где звездочками $*$ обозначены блоки, не представляющие для нас интереса.
Обозначим посредством $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ матрицу оператора $(E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta))^{-1}$ в базисе $\mathfrak{A}_u$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Тогда

$$\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta}^{-1} + A_{0,\zeta}^{-1}B_{0,\zeta}(D_{0,\zeta} - C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}B_{0,\zeta})^{-1}C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{0,\zeta}^{-1} - \zeta A_{0,\zeta}^{-1}WF_\zeta(I_\delta - \zeta TF_\zeta + \zeta C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}WF_\zeta)^{-1}C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \ \zeta \in \mathbb{D}.$$

Пусть $\{u_j\}_{j=0}^{\rho-1}$ является множеством элементов, которые были получены с помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта векторов $\{y_k^-\}_{k=0}^{N-1}$. Заметим, что $\rho \geq 1$. В противном случае мы получили бы $y_k^- = 0$, $0 \leq k \leq N-1$. Согласно (85), это означало бы, что проблема моментов (49) определенная. Последнее противоречит нашим предположениям. Полагаем

$$H_\rho^- := \mathrm{Lin}\{y_k^-\}_{k=0}^{N-1} = \mathrm{Lin}\{u_j\}_{j=0}^{\rho-1}.$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$\mathcal{J}_\zeta := P_{H_\rho^-}^H (E_H - \zeta(V \oplus \Phi_\zeta))^{-1} P_{H_\rho^-}^H, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

как оператор в (конечномерном) гильбертовом пространстве H_ρ^-. Его матрицу в базисе $\{u_j\}_{j=0}^{\rho-1}$ мы обозначим через J_ζ. Она имеет следующий вид:

$$J_\zeta = A_{1,\zeta} - \zeta A_{2,\zeta}WF_\zeta(I_\delta - \zeta TF_\zeta + \zeta C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}WF_\zeta)^{-1}C_{0,\zeta}A_{3,\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Здесь $A_{1,\zeta}$ является матрицей, стоящей в первых ρ строках и первых ρ столбцах матрицы $A_{0,\zeta}^{-1}$; $A_{2,\zeta}$ является матрицей, стоящей в первых ρ строках матрицы $A_{0,\zeta}^{-1}$; $A_{3,\zeta}$ – матрица, стоящая в первых ρ столбцах матрицы $A_{0,\zeta}^{-1}$.

Рассмотрим следующий оператор из $\mathbb{C}^N$ в H_ρ^-:

$$\mathcal{K}\sum_{n=0}^{N-1} c_n \vec{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} c_n y_n^-, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

где $\vec{e}_n = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \ldots, \delta_{n,N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Пусть K — матрица оператора $\mathcal{K}$ относительно ортонормированных базисов $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{N-1}$ и $\{u_j\}_{j=0}^{\rho-1}$:

$$K = \left((\mathcal{K}\vec{e}_k, u_j)_H\right)_{0\le j\le\rho-1,\ 0\le k\le N-1} = \left((y_k^-, u_j)_H\right)_{0\le j\le\rho-1,\ 0\le k\le N-1}.$$

Используя (85), мы можем утверждать, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dm_{k,j}(\lambda) =$$

$$= \frac{2i}{(z^2+1)^2}\left(P^H_{H_\rho^-}\left[E - \zeta(V\oplus\Phi_\zeta)\right]^{-1} P^H_{H_\rho^-}\mathcal{K}\vec{e}_k, \mathcal{K}\vec{e}_j\right)_H - \frac{1}{(z^2+1)(z-i)}\varphi_{j,k}(z) =$$

$$= \frac{2i}{(z^2+1)^2}\left(\mathcal{K}^*\mathcal{J}_\zeta\mathcal{K}\vec{e}_k, \vec{e}_j\right)_{\mathbb{C}^N} - \frac{1}{(z^2+1)(z-i)}\varphi_{j,k}(z),$$

$$0 \le k, j \le N-1, \quad z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \quad \zeta = \frac{z-i}{z+i},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми функциями $\Phi_\cdot \in \mathcal{S}(\mathbb{D}; H\ominus H^-, H\ominus H^+)$ и всеми решениями $M(\lambda) = (m_{k,j}(\lambda))_{k,j=0}^{N-1}$ проблемы моментов (49).
Заметим, что $(\mathcal{K}^*\mathcal{J}_\zeta\mathcal{K}\vec{e}_k, \vec{e}_j)_{\mathbb{C}^N}$ является элементом в j-й строке и k-м столбце матрицы $\mathcal{M}_{3,\zeta}$ оператора $\mathcal{J}_{1,\zeta} := \mathcal{K}^*\mathcal{J}_\zeta\mathcal{K}$ в базисе $\{e_n\}_{n=0}^{N-1}$. Мы можем записать

$$\mathcal{M}_{3,\zeta} = K^* J_\zeta K =$$

$$= K^* A_{1,\zeta} K - \zeta K^* A_{2,\zeta} W F_\zeta (I_\delta + \zeta(C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}W - T)F_\zeta)^{-1} C_{0,\zeta} A_{3,\zeta} K, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Полагаем

$$\Delta(z) := (\varphi_{j,k}(z))_{j,k=0}^{N-1}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Тогда соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dM^T(\lambda) = \frac{2i}{(z^2+1)^2} K^* A_{1,\zeta} K - \frac{1}{(z^2+1)(z-i)}\Delta(z) -$$

$$- \frac{2i}{(z^2+1)^2}\zeta K^* A_{2,\zeta} W F_\zeta (I_\delta + \zeta(C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}W - T)F_\zeta)^{-1} C_{0,\zeta} A_{3,\zeta} K,$$

$$z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \quad \zeta = \frac{z-i}{z+i}, \tag{96}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми $\mathbb{C}_{\omega\times\delta}$-значными функциями F_ζ, аналитическими в $\mathbb{D}$, значения которых удовлетворяют неравенству $F_\zeta^* F_\zeta \le I_\delta$, и всеми решениями $M(\lambda)$ проблемы моментов (49). Полагаем

$$\mathbf{A}(z) = 2iK^* A_{1,\zeta} K - (z+i)\Delta(z), \quad \mathbf{B}(z) = -2i\zeta K^* A_{2,\zeta} W, \tag{97}$$

$$\mathbf{C}(z) = \zeta(C_{0,\zeta}A_{0,\zeta}^{-1}W - T), \quad \mathbf{D}(z) = C_{0,\zeta}A_{3,\zeta}K, \quad z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \quad \zeta = \frac{z-i}{z+i}. \tag{98}$$

Тогда правая часть (96) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}\mathbf{A}(z) + \frac{1}{(z^2+1)^2}\mathbf{B}(z) F_\zeta (I_\delta + \mathbf{C}(z)F_\zeta)^{-1}\mathbf{D}(z).$$

Теорема 11. *Пусть задана матричная проблема моментов Гамбургера (49) и выполнено условие (51), с Γ_n из (50). Предположим, что проблема моментов является неопределенной. Все решения проблемы моментов (49) могут быть получены из следующего соотношения:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dM^T(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{(z^2+1)^2}\mathbf{A}(z) + \frac{1}{(z^2+1)^2}\mathbf{B}(z)\mathbf{F}(z)(I_\delta + \mathbf{C}(z)\mathbf{F}(z))^{-1}\mathbf{D}(z), \quad z \in \mathbb{C}_+\backslash\{i\}, \tag{99}$$

где $\mathbf{A}(z)$, $\mathbf{B}(z)$, $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{D}(z)$ являются аналитическими в $\mathbb{C}_+$, матричнозначными функциями, определяемыми посредством (97), (98), со значениями в $\mathbb{C}_{N\times N}$, $\mathbb{C}_{N\times\omega}$, $\mathbb{C}_{\delta\times\omega}$, $\mathbb{C}_{\delta\times N}$ соответственно. Здесь $\mathbf{F}(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_{\omega\times\delta}$-значной функцией, значения которой удовлетворяют неравенству $\mathbf{F}(z)^*\mathbf{F}(z) \leq I_\delta$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$. Наоборот, произвольная аналитическая в $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_{\omega\times\delta}$-значная функция, такая, что $\mathbf{F}(z)^*\mathbf{F}(z) \leq I_\delta$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$, порождает согласно соотношения (99) некоторое решение проблемы моментов (49). Соответствие между всеми аналитическими в $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_{\omega\times\delta}$-значными функциями, такими, что $\mathbf{F}(z)^*\mathbf{F}(z) \leq I_\delta$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$, и всеми решениями проблемы моментов (49) взаимно однозначно.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из рассуждений перед формулировкой теоремы. □

Упражнения

1. В гильбертовом пространстве H зафиксированы элементы x_0, x_1, x_2. Известна матрица Грама этих векторов $G_2 = ((x_n, x_m)_H)_{n,m=0}^2$:

а) $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $G_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2i+1 & 1 \\ -2i+1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $G_2 = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта к последовательности векторов (отбрасывая линейно зависимые векторы):

$$x_0,\ x_1,\ x_2.$$

Полученные векторы u_0, u_1, u_2 должны представлять собой линейные комбинации векторов x_0, x_1, x_2 с численными коэффициентами.

2. Задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов со следующими моментами:

а) $S_0 = 2\pi$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$;

б) $S_0 = \pi$, $S_1 = 2i$, $S_2 = 0$;
в) $S_0 = 2\pi^2$, $S_1 = -2\pi i$, $S_2 = -\pi i$;
г) $S_0 = \frac{\pi^2}{2}$, $S_1 = \pi i - 2$, $S_2 = -\frac{\pi}{2} i$.
Проверить условия разрешимости и условия определенности проблемы моментов.
3. Для проблем моментов из предыдущего упражнения описать все решения.

Библиографические примечания

1.1. В этом пункте в основном излагаются результаты из статьи М. Розенберга [57]. Некоторые свойства функции распределения меры взяты из статьи М. М. Маламуда и С. М. Маламуда [26].
1.2. Скалярная ($N = 1$) усеченная тригонометрическая проблема моментов хорошо изучена. В 1911 году Ф. Рисс и Г. Герглотц получили необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи (например, [1]). В положительно определенном случае ($T_d > 0$) М. Г. Крейн и А. А. Нудельман описали канонические решения задачи [24]. В 1966 году М. Е. Чумакин описал все решения скалярной усеченной тригонометрической проблемы моментов, используя свои результаты по обобщенным резольвентам изометрических операторов (см. [31]).
В случае произвольного N необходимое и достаточное условие для разрешимости усеченной матричной тригонометрической проблемы моментов (далее сокращенно УМТПМ) доказано в [36]. В 1969 году О. Т. Инин получил описание всех решений УМТПМ во вполне неопределенном случае: $T_d > 0$ [13]. В своей работе он использовал результаты теории псевдогильбертовых пространств, которая была построена М. Г. Крейном и Ю. М. Березанским [3]. УМТПМ тесно связана (и в существенном эквивалентна) с матричной проблемой коэффициентов Каратеодори. Эта связь основана на матричном обобщении классического интегрального представления Рисса–Херглотца аналитической функции в единичном круге, имеющей неотрицательную вещественную часть (см. [44], [51] и ссылки в этих работах). В 1998 году параметрическое описание всех решений последней задачи одновременно в невырожденном и вырожденном случаях было впервые получено Г.-Н. Чен, И.-Й. Ху [44]. В 2006 году другое параметрическое описание всех решений задачи одновременно в невырожденном и вырожденном случаях было получено Б. Фритцше и Б. Кирстайном [51]. Однако осталось невыясненным, задают ли вышеупомянутые параметризации взаимно-однозначное соответствие между соответствующими множествами параметров и решениями задачи.

В этом пункте излагаются, в частности, наши результаты из статей [7], [8].
1.3. В скалярном случае описание решений проблемы моментов Гамбургера можно найти, например, в [1], [3] для невырожденного случая, и в [2] для вырожденного случая.
Матричная проблема моментов Гамбургера была впервые рассмотрена М. Г. Крейном в 1949 году и им получены условия разрешимости этой задачи [20]. М. Г. Крейн описал все решения в том случае, когда соответствующая J-матрица задает симметрический оператор с максимальными дефектными числами. Этот результат появился без доказательства в [21]. В 1965 году Ю. М. Березанский доказал главный факт в этой теории М. Г. Крейна: сходимость рядов из полиномов первого рода, даже для случая операторной проблемы моментов [3, с. 554–590]. При дополнительных условиях описания решений были получены И. В. Ковалишиной [14], П. Лопесом-Родригесом [55], и Ю. М. Дюкаревым [5]. При условии строгой позитивности $\Gamma_n \geq \delta_n I_{(n+1)N}$, $\delta_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, операторная проблема моментов Гамбургера изучалась Г. М. Ильмушкиным и Е. Л. Александровым в [10], [11]. Однако предложенное ими доказательство формулы Неванлинны нельзя считать полным, поскольку формула, связывающая спектральные функции соответствующего симметрического оператора и решения проблемы моментов, была сформулирована без доказательства в [11] (см. формулу (2.3)) и

цитируемых статьях [10, Теорема 2], [9, Теорема 1]. Кроме того, также без доказательства утверждалось, что формула остается верной и в общем случае [10, с. 77–78].
По-видимому, первое описание всех решений операторной проблемы моментов Гамбургера без дополнительных предположений было дано А. Я. Хейфецом в работе [54]. Для получения этого описания использовалась хорошо известная абстрактная интерполяционная задача, авторами которой являются В. Э. Кацнельсон, А. Я. Хейфец и П. М. Юдицкий. Описание решений представляло собой формулу, имеющую более сложную структуру, чем формула Неванлинны.

Равносильность условий (A)$\Leftrightarrow$(B) в теореме 10 по сути принадлежит М. Г. Крейну [20, с. 58] (см. также [21, Теорема 3]). Некоторый метод для вычисления дефектных чисел и соответствующие необходимые и достаточные условия для определенности матричной проблемы моментов были также предложены М. Г. Крейном в [20, с. 58]. Некоторые достаточные условия для определенности матричной проблемы моментов Гамбургера были даны Х. Бергом в [40, Теорема 3.6, Следствие 3.7]. Связь между обобщенными резольвентами изометрического оператора и его обратного преобразования Кэли была установлена в статье М. Е. Чумакина [30]. В данном пункте изложены наши результаты из статей [64], [65].

Список литературы

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1961. – 312 с.
2. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. – Х.: ГОНТИ, 1938. – 256 с.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 800 с.
4. Дубовой В. К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. IV // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1984. – **42**. – С. 46–57.
5. Дюкарев Ю. М. О неопределенности интерполяционных задач для неванлинновских функций // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 2004. – **507**, № 8 (507). – С. 26–38.
6. Ершов В. Г. Усеченная матричная степенная проблема моментов // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1968. – № 9. – С. 36–43.
7. Загороднюк С. М. Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов: операторный подход // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 6. – С. 786–797.
8. Загороднюк С. М. Формула Неванлинны для усеченной матричной тригонометрической проблемы моментов // Укр. мат. журнал. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1053–1066.
9. Ильмушкин Г. М. Усеченная операторная степенная проблема моментов // Функциональный анализ (Ульяновск). – 1973. – **1**. – С. 51–62.
10. Ильмушкин Г. М. О решениях операторной степенной проблемы моментов // Функциональный анализ (Ульяновск). – 1980. – **14**. – С. 74–79.
11. Ильмушкин Г. М., Александров Е. Л. О решениях операторной степенной проблемы моментов // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1989. – № 3. – С. 18–24.
12. Ильмушкин Г. М., Турицын А. Б. Усеченная операторная тригонометрическая проблема моментов // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1982. – № 7 (242). – С. 17–21.
13. Инин О. Т. Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1969. – № 5 (84). – С. 49–57.
14. Ковалишина И. В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Известия АН СССР. – 1983. – **47**, № 3. – С. 455–497.
15. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Матем. сб. – 1987. – **134(176):2(10)**. – С. 186–206.

16. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – **53:4**. – С. 868—885.
17. Коробов В. И., Скляр Г. М. Min-проблема моментов Маркова и быстродействие // Сибирский математический журнал. – 1991. – **32**, № 1. – С. 60–71.
18. Коробов В. И., Сморцова Т. И. Решение уравнения Беллмана для задачи быстродействия для канонической системы и его связь с проблемой моментов // Вiсник Харкiвського унiверситету. Сер. «Математика, прикладна математика i механiка». – 2002, № 542. – С. 3–12.
19. Крейн М. Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // ДАН УССР. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3–6.
20. Крейн М. Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. матем. журнал. – 1949. – **1**, № 2. – С. 3–66.
21. Крейн М. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов // ДАН СССР. – 1949. – **LXIX**, № 2. – С. 125–128.
22. Крейн М. Г. Про ермiтовi оператори з напрямними функцiоналами // Академiя Наук УРСР, Збiрник праць Iнституту математики. – 1948. – № 10. – С. 83–106.
23. Крейн М. Г., Красносельский М. А. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // Успехи матем. наук. – 1947. – **II**, вып. 3(19). – С. 60–106.
24. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие. – М.: Наука, 1973.– 552 с.
25. Лукс Л. Н. О решении матричной усеченной степенной проблемы моментов на отрезке и полуоси // Функциональный анализ (Ульяновск). – 1976. – **7**. – С. 116–124.
26. Маламуд М. М., Маламуд С. М. Операторные меры в гильбертовом пространстве // Алгебра и анализ. – 2003. – **15**, вып. 3. – С. 1–77.
27. Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора // Известия АН СССР. – 1940. – **4**. – С. 277–318.
28. Наймарк М. А. О спектральных функциях симметрического оператора // Известия АН СССР. – 1943. – **7**. – С. 285–296.
29. Чумакин М. Е. Об обобщенных резольвентах изометрического оператора // ДАН СССР. – 1964. – **154**, № 4. – С. 791–794.
30. Чумакин М. Е. Об одном классе обобщенных резольвент изометрического оператора // Учен. записки Ульяновского пединститута. – 1966. – **20**, вып. 4. – С. 361–373.
31. Чумакин М. Е. Решения усеченной тригонометрической проблемы моментов // Учен. зап. Ульяновск. педин-та. – 1966. – **20**, вып. 4. – С. 311–355.
32. Чумакин М. Е. Обобщенные резольвенты изометрических операторов // Сибирский мат. журнал. – 1967. – **VIII**, № 4. – С. 876–892.
33. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Известия АН СССР. – 1954. – **18**. – С. 51–86.
34. Adamyan V. M., Tkachenko I. M. Solution of the truncated matrix Hamburger moment problem according to M.G. Krein // Oper. Theory Adv. Appl. – 2000. – **118**. – P. 33–51.
35. Adamyan V. M., Tkachenko I. M. General solution of the Stieltjes truncated matrix moment problem // Oper. Theory Adv. Appl. – 2005. – **163**. – P. 1–22.
36. Ando T. Truncated moment problems for operators // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1970. – **31**. – P. 319–334.
37. Ball J.A., Gohberg I., Rodman L. Interpolation of rational matrix functions. – Oper. Theory Adv. Appl. – 1990. – **45**. – 605 p.
38. Ball J. A., Helton J. W. Interpolation problems of Pick-Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions: parametrization of the set of all solutions // Integral Equations

Operator Theory. – 1986. – **9**. – P. 155–203.
39. Berezansky Yu. M., Dudkin M. E. The strong Hamburger moment problem and related direct and inverse spectral problems for block Jacobi-Laurent matrices // Methods Funct. Anal. Topology. – 2010. – **16**, no. 3. – P. 203–241.
40. Berg C. The matrix moment problem // Coimbra lecture notes on orthogonal polynomials. – Nova Publishers, New York. – 2008. – P. 1–57.
41. Bolotnikov V., Dym H. On degenerate interpolation, entropy and extremal problems for matrix Schur functions // Integral Equations Operator Theory. – 1998. – **32**. – P. 367–435.
42. Bruinsma P. Degenerate interpolation problems for Nevanlinna pairs // Indag. Math., N.S. – 1991. – **2**. – P. 179–200.
43. Chen G.-N., Hu Y.-J. The truncated Hamburger matrix moment problems in the nondegenerate and degenerate cases, and matrix continued fractions // Linear Algebra Appl. – 1998. – **277**. – P. 199–236.
44. Chen G.-N., Hu Y.-J. On the multiple Nevanlinna-Pick matrix interpolation in the class φ_p and the Carathéodory matrix coefficient problem // Linear Algebra Appl. – 1998. – **283**. – P. 179–203.
45. Constantinescu T. Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems. – Operator Theory Adv. Appl. – 1996. – **82**. – 253 p.
46. Delsarte P., Genin Y., Kamp Y. The Nevanlinna–Pick Problem for Matrix-Valued Functions // SIAM J. Appl. Math. – 1979. – **36**, no. 1. – P. 47-61.
47. Dubovoj V. K., Fritzsche B., Kirstein B. Matricial version of the classical Schur problem. – Teubner-Texte zur Mathsematik 129, B. G. Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1992. – 355 p.
48. Dym H. J-contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation. – CBMS, 71, Amer. Math. Soc., 1989. – 147 p.
49. Foias C., Frazho A. E. The commutant lifting approach to interpolation problems. – Oper. Theory Adv. Appl. – 1990. – **44**. – 632 p.
50. Foias C., Frazho A. E., Gohberg I., Kaashoek M. A. Metric constrained interpolation, commutant lifting and systems. – Oper. Theory Adv. Appl. – 1998. – **100**. – 587 p.
51. Fritzsche B., Kirstein B. The matricial Carathéodory problem in both nondegenerate and degenerate cases // Oper. Theory Adv. Appl. – 2006. – **165**. – P. 251–290.
52. Fuglede B. The multidimensional moment problem // Expo. Math. – 1983. – **1**. – P. 47–65.
53. Korobov V. I., Sklyar G. M. Markov power min-problem with periodic gaps // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – **80**, no. 1. – P. 1559–1581.
54. Kheifets A. Hamburger moment problem: Parseval equality and A-singularity // Journal of Functional Analysis. – 1996. – **141**. – P. 374–420.
55. Lopez-Rodriguez P. The Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem // Math. Scand. – 2001. – **89**. – P. 245–267.
56. Putinar M., Schmüdgen K. Multivariate determinateness // Indiana Univ. Math. J. – 2008. – **57:6**. – P. 2931–2968.
57. Rosenberg M. The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative Hermitian measure // Duke Math. J. – 1964. – **31**. – P. 291–298.
58. Rosenblum M., Rovnyak J. Hardy classes and operator theory. – Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, 1985. – 161 p.
59. Sakhnovich L. A. Interpolation theory and its applications. – Kluwer, Dordrecht: Mathematics and its applications. – 428, 1997. – 197 p.
60. Shohat J. A., Tamarkin J. D. The problem of moments. – New York City: Amer. Math. Soc, 1943. – 140 p.
61. Simonov K. K. Strong truncated matrix moment problem of Hamburger // Sarajevo Journal of Nathematics. – 2006. – **2**(15). – P. 181–204.

62. Simonov K. K. Strong matrix moment problem of Hamburger // Methods Funct. Anal. Topology. – 2006. – **12**, no. 2. – P. 183–196.
63. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Development on the Markov moment problem approach in the optimal control theory // Methods Funct. Anal. Topology. – 2007. – **13**, no. 4. – P. 386–400.
64. Zagorodnyuk S. M. A description of all solutions of the matrix Hamburger moment problem in a general case // Methods Funct. Anal. Topology. – 2010. – **16**, no. 3. – P. 271–288.
65. Zagorodnyuk S. M. The Nevanlinna-type formula for the matrix Hamburger moment problem // Methods Funct. Anal. Topology. – 2012. – **18**, no. 4. – P. 387–400.
66. Szökefalvi-Nagy B., Koranyi A. Relations d'un probléme de Nevanlinna et Pick avec la théorie de l'espace hilbertien // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1957. – **7**. – P. 295–302.
67. Szökefalvi-Nagy B., Koranyi A. Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie // Acta Math. – 1958. – **100**. – P. 171–202.

Навчальне видання

Загороднюк Сергій Михайлович

Операторний підхід до матричних проблем моментів

Методичні вказівки до практичних занять і самостійної праці студентів четвертого курсу механіко-математичного факультету

(Рос. мовою)

Коректор *А. І. Сєдих*

Комп'ютерне верстання С. *М. Загороднюк*

Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 3,22. Тираж 50 пр. Зам. № 157/14.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32